

1. Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z &= 1 \\ x - y - 2z &= 0 \\ 2x - y + hz &= k \end{cases}$$

Hierin zijn x, y en z de onbekenden en zijn h en k reële parameters.

- a) Voor welke waarden van h en k heeft dit stelsel precies één oplossing?
- b) Voor welke waarden van h en k heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen?

Verklaar je antwoorden.

2. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & k \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de determinant van A (als functie van k).
Voor welke k is de matrix A inverteerbaar?
- b) Kies $k = 3$. Stel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Los x_1 op met behulp van de regel van Cramer uit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. De matrix B en de vector $\mathbf{c}$ zijn gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Toon aan dat $\text{col}(B) = \mathbb{R}^3$.
- b) Geef een basis voor de nulruimte van B .
- c) Geef alle oplossingen van $B\mathbf{x} = B\mathbf{c}$

Z.O.Z.

4. $\mathbb{P}_3$ is de vectorruimte van alle polynomen $\mathbf{p}$ van de graad kleiner dan of gelijk aan 3, inclusief het nulpolynoom. We bekijken de afbeelding $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door:

$$T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
 - Geef een basis voor de kern van T .
 - Is T injectief (one-to-one)? Motiveer je antwoord.
5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- Als in $\mathbb{R}^n$ het stelsel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineair onafhankelijk is, dan is het stelsel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ ook lineair onafhankelijk.
 - Laat A en P inverteerbare 2×2 matrices zijn.
Dan geldt: $\det(PA^T P^{-1}) = \det(A)$.
 - De verzameling

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

6. a) $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is een lineaire transformatie. Toon aan: als T twee onafhankelijke vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ afbeeldt op twee afhankelijke vectoren $T(\mathbf{u})$ en $T(\mathbf{v})$, dan heeft de vergelijking $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ oneindig veel oplossingen.
- b) Laat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een lineair afhankelijke opspannende verzameling vectoren zijn voor de vectorruimte V . Toon aan dat iedere $\mathbf{w}$ op meer dan één manier kan worden geschreven als lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$.

Normering:

1 : 4	2 : a) 2 b) 3	3 : a) 3 b) 3 c) 2	4 : a) 2 b) 3 c) 2	5 : 6	6 : a) 3 b) 3
4	5	8	7	6	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$