Uitwerking Voortentamen Lineaire Algebra voor BWI 26-10-200

① $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & h & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & h+6 & k+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h+3 & k-1 \end{array}\right).$

a) Er is precies één oplossing als $h \neq -3$. (dan 3 pivots)

b) Er zijn ∞ veel oplossingen als $h = -3$ én $k = 1$ (dan is er een vrije variabele, maar wel een consistent stelsel).

② a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & k+2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & k+2 \end{vmatrix} = 2k-5$

Dus A is inverteerbaar als $k \neq 5/2$.

b) Als $k=3$ is $\det(A) = 1$. Dan: $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

③ a) $B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$ Er zijn 3 pivots, dus 3 onafhankelijke kolommen in $\mathbb{R}^3$.

Aangezien die $\mathbb{R}^3$ opspannen geldt dus $\operatorname{col}(B) = \mathbb{R}^3$.

b) $B\underline{x} = \underline{0} \rightarrow U\underline{x} = \underline{0}$. Kies x_3 vrij. Dan: $x_4 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}x_3$ en $x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{4}x_3$. Dus: $\underline{x} = x_3\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Een basis van Nul(A) is dus bv. $\{(1,2,4,0)\}$.

c) Een particuliere oplossing is $\underline{x} = \underline{c}$. Alle oplossingen zijn dus: $\underline{x} = \underline{c} + k \cdot (1,2,4,0)$ met $k \in \mathbb{R}$.

④ a) Kies p_1 en p_2 willekeurig uit $\mathbb{P}_3$. Dan $T(p_1+p_2) = \begin{pmatrix} (p_1+p_2)(-1) \\ (p_1+p_2)(0) \\ (p_1+p_2)(1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} p_1(-1) \\ p_1(0) \\ p_1(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(-1) \\ p_2(0) \\ p_2(1) \end{pmatrix} = T(p_1) + T(p_2)$. Kies nu p willekeurig uit $\mathbb{P}_3$

en $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. $T(cp) = \begin{pmatrix} (cp)(-1) \\ (cp)(0) \\ (cp)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot p(-1) \\ c \cdot p(0) \\ c \cdot p(1) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = cT(p).$

b) Kies $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{P}_3$ willekeurig en bekijk $T(p) = \underline{0}$.
Dus: $(a-b+c-d,\ a,\ a+b+c+d) = (0,0,0)$.
Hieruit volgt: $a=0$, $c=0$ en $b+d=0$. Alle polynomen uit de kern van T zijn dus van de vorm $p(t) = bt - bt^3$. Een basis voor kern T is bv. $\{t - t^3\}$.

c) T is niet injectief. Immers $T(p) = \underline{0}$ heeft oneindig veel oplossingen, dus meer dan 1 (bv $p=0$ of $p = t-t^3$).

⑤ a) WAAR. Bekijk $c_1\underline{v}_1 + c_2(\underline{v}_1+\underline{v}_2) + c_3(\underline{v}_1+\underline{v}_2+\underline{v}_3) = \underline{0}$. Dat is dus $(c_1+c_2+c_3)\underline{v}_1 + (c_2+c_3)\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 = \underline{0}$. Omdat $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineair onafhankelijk zijn geldt $c_3=0$, $c_2+c_3=0$ en $c_1+c_2+c_3=0$. Dus: $c_1=c_2=c_3=0$.
Kortom $\{\underline{v}_1, \underline{v}_1+\underline{v}_2, \underline{v}_1+\underline{v}_2+\underline{v}_3\}$ is ook lineair onafhankelijk

b) WAAR. Immers: $\det(PA^TP^{-1}) = \det P \cdot \det A^T \cdot \det P^{-1} =$
$= \det P \cdot \det P^{-1} \cdot \det A^T = \det(PP^{-1}) \cdot \det A^T = \det I \cdot \det A^T =$
$= 1 \cdot \det A = \det A$ $\quad (\det A^T = \det A$ en $\det I = 1)$.

c) WAAR. W is kennelijk de nulruimte van de matrix $(1\ \ {-1}\ \ 2)$, dus een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$. [Kan ook op andere manieren.]

⑥ a) $\{T(\underline{u}), T(\underline{v})\}$ is een lineair afhankelijke verzameling, dus er bestaan c_1 en c_2 (niet beide 0) zo dat $c_1T(\underline{u}) + c_2T(\underline{v}) = \underline{0}$; dus er geldt $T(c_1\underline{u} + c_2\underline{v}) = \underline{0}$ vanwege de lineariteit van T. Omdat $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ een onafhankelijk stelsel is, is $c_1\underline{u} + c_2\underline{v} \neq \underline{0}$. Dus $T(\underline{x}) = \underline{0}$ heeft een niet triviale oplossing en daarmee dus oneindig veel oplossingen.

b) Omdat $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineair afhankelijk is, bestaan er c_1, c_2 en c_3 (niet alle 0) zo dat $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 = \underline{0}$.
Omdat $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ de ruimte V opspannen is iedere $\underline{w} \in V$ te schrijven als lineaire combinatie van $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_3$, bijvoorbeeld $\underline{w} = d_1\underline{v}_1 + d_2\underline{v}_2 + d_3\underline{v}_3$. Maar dan is $\underline{w}$ ook te schrijven als
$\underline{w} = (c_1+d_1)\underline{v}_1 + (c_2+d_2)\underline{v}_2 + (c_3+d_3)\underline{v}_3$.