

1. Gegeven zijn de vectoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t^2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal voor welke $t \in \mathbb{R}$ het stelsel $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ lineair afhankelijk is.

De matrix A wordt gegeven door [vergelijk met onderdeel a)!]:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bepaal een basis voor de nulruimte van A .

c) Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

De lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ wordt gedefinieerd door $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

d) Is T injectief (one-to-one)? Is T surjectief (onto)? [Verklaar je antwoorden.]

2. De matrix B is gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Toon aan dat 1 een eigenwaarde van B is; bepaal een bijbehorende eigenvector.

b) Bepaal de andere eigenwaarde(n) van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimte(n).

c) Bepaal de inverse van B .

3. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen $\mathbf{p}$ van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom.

a) Laat zien dat het stelsel polynomen

$$\mathcal{B} := \{1 - x, 2x - x^2, 3x^2 - 1\}$$

lineair onafhankelijk is in $\mathbb{P}_2$.

b) Licht toe dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathbb{P}_2$.

c) Bepaal $[x^2]_{\mathcal{B}}$, de coördinaatvector van x^2 t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.

Z.O.Z.

4. De deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor V .
- Bepaal alle vectoren $\mathbf{w} \in V^\perp$ die voldoen aan $\|\mathbf{w}\| = 1$.
- Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het inconsistente stelsel

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3.$$

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- De functie $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door $T(x, y) = (x - 2y, 3|x|)$ is een lineaire afbeelding.
 - A en B zijn gelijkvormige (similar) 2×2 matrices. Dan geldt: $\det A = \det B$.
 - Laat $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Als $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, dan geldt $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
 - Als de matrix A diagonaliseerbaar is, dan is de matrix $A + A^2$ ook diagonaliseerbaar.
 - De kwadratische vorm $Q(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ is positief definit.
6. a) Laat A een 4×3 matrix zijn met rang 3. Bewijs: Als $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ dan is $A\mathbf{x} \neq A\mathbf{y}$.
b) $C[0, \pi]$ is de vectorruimte van alle continue functies op $[0, \pi]$. We definiëren voor $f, g \in C[0, \pi]$ het inproduct

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\pi f(t)g(t) \sin t \, dt.$$

[NB: Je hoeft niet te bewijzen dat dit een inproduct is.]
Bereken $\|\cos t\|$ ten opzichte van dit inproduct.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 2	3 : a) 2	4 : a) 2	5 : 10	6 : a) 2
b) 2	b) 3	b) 1	b) 3		b) 3
c) 2	c) 3	c) 2	c) 3		
d) 2					
9	8	5	8	10	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$