Uitwerking tentamen Lineaire Algebra voor BWI 10-2-200

1 a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & t^2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & t^2-8 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t+3 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & t+3 \\ 0 & 0 & 0 & t^2(t+3) \end{pmatrix}$ De matrix heeft rang 3 als $t=0$ of $t=-3$.
Voor die waarde is $\{a, b, c, d\}$ lineair afhankelij
Voor alle andere t is het stelsel lin. onafh.

b) Zie a) met $t=0$ gekozen. $A\underline{x}=\underline{0}$ wordt na vegen:

$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Kies x_4 vrij, dan: $x_3 = 3x_4$, $x_2 = 9x_4$ en $x_1 = 6x_4$. Een basis voor Nul A is bv. $\{(6,9,3,1)\}$.

c) Een particuliere oplossing is $(1,1,0,0)$. M.b.v. onderdeel b) vinden we dus dat alle opl. van $A\underline{x}=\underline{a}+\underline{b}$ zijn: $\underline{x} = (1,1,0,0) + \lambda\cdot(6,9,3,1)$, $\lambda \in$

d) T niet injectief. Immers zowel $\underline{x}=\underline{0}$ als $\underline{x}=(6,9,3,1)$ worden op $\underline{0}$ afgebeeld. T niet surjectief: De kolommen van A spannen niet heel $\mathbb{R}^4$ op, want ze zijn niet lineair onafhankelijk.

2 a) $(B-1\cdot I)\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = c\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dus $\lambda=$ is een eigenwaarde van B en $(-1,1,1)$ een bijt. eigenve

b) $\det(B-\lambda I)=0$ geeft $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -1-\lambda \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} = +(1+\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda) = 0$
dus $\lambda=1$ of $\lambda=-1$

$\lambda=-1$: $(B+I)\underline{x}=\underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = c\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dus een basis is $\{(0,1,1)\}$

c) $(B \mid I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$. Dus $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3 a) $c_1(1-x) + c_2(2x-x^2) + c_3(3x^2-1) = 0 \quad \forall x$ geeft:
$c_1 - c_3 = 0$, $-c_1 + 2c_2 = 0$, $-c_2 + 3c_3 = 0$ met enige opl $c_1 = c_2 = c_3 = 0$
Dus stelsel is lin. onafh. [kan ook met coordinaatvectoren in $\mathbb{R}^3$]

b) Het stelsel is lin. onafh (zie a) en spant $\mathbb{P}_2$ op (want daarvoor zijn 3 onafh polynomen uit $\mathbb{P}_2$ nodig). Dus B vormt een basis voor $\mathbb{P}_2$.

c) Stel $[x^2]_B = (c_1, c_2, c_3)$. Dan: $c_1(1-x) + c_2(2x-x^2) + c_3(3x^2-1) = x^2$.
Vergelijken van machten van x levert $c_1 = 2/5$ $c_2 = +1/5$ $c_3 = 2/5$.
[kan ook weer via coördinaatvectoren in $\mathbb{R}^3$]

4 a) Merk op dat $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$. Kies dus voor de orth basis $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$ en $\underline{u}_2 = \underline{v}_2$. M.b.v. Gram-Schmidt vinden we:

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \frac{\underline{v}_3^T \underline{u}_1}{\underline{u}_1^T \underline{u}_1} \underline{u}_1 - \frac{\underline{v}_3^T \underline{u}_2}{\underline{u}_2^T \underline{u}_2} \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Er moet dus gelden: $\underline{w} \perp \underline{u}_1$, $\underline{w} \perp \underline{u}_2$, $\underline{w} \perp \underline{u}_3$ en $\underline{w} \bullet \underline{w} = 1$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ levert $\underline{w} = c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\underline{w} \bullet \underline{w} = 1$ bepaalt dat $c = \pm 1/\sqrt{5}$

c) Stel $A = (\underline{v}_1\ \underline{v}_2)$ en $\underline{b} = \underline{v}_3$. Dan k.k.opl $\hat{\underline{x}}$ te vinden via $A^T A \hat{\underline{x}} = A^T$

Dus: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, of: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Dus $\hat{\underline{x}} = (1, 1)$. [kan ook via onderdeel a) !]