



1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ worden gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de rang van A en geef een basis voor de rijruimte van A .
- Geef een basis voor de nulruimte van A .
- Bereken alle kleinste-kwadraten oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. De matrix B is gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat $\mathbf{x} = (0, 2, -3)$ een eigenvector van B is. Wat is de bijbehorende eigenwaarde?
- Bepaal de andere eigenwaarde(n) van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimte(n).
- Is B diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

3. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen $\mathbf{p}$ van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom. We beschouwen de lineaire afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door:

$$T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) - \mathbf{p}(1) \end{pmatrix}.$$

- Geef een basis voor het bereik (range) van T .
- Bepaal de dimensie van de kern (kernel) van T .
- Is T injectief (one-to-one)?
Is T surjectief (onto)?
[Motiveer je antwoorden.]

Z.O.Z.

4. De matrix C en de vector $\mathbf{w}$ worden gegeven door

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthonormale basis voor $\text{Col}(C)$ (de kolomruimte van C).
 - b) Volgens de orthogonale decompositiestelling is de vector $\mathbf{w}$ te schrijven als $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, waarin $\mathbf{w}_1 \in \text{Col}(C)$ en $\mathbf{w}_2 \in (\text{Col}(C))^\perp$. Bepaal $\mathbf{w}_1$ en $\mathbf{w}_2$.
 - c) Bepaal de afstand van $\mathbf{w}$ tot $\text{Col}(C)$.
5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a) Laat A een $m \times n$ matrix zijn. Als de rang van A gelijk is aan m , dan is de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent voor alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
 - b) Laat $A^T A$ een 3×3 matrix zijn. Als $A^T A$ inverteerbaar is, dan is ook de matrix A inverteerbaar.
 - c) Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als A een complexe eigenwaarde heeft, dan heeft de matrix $A + I$ ook een complexe eigenwaarde.
 - d) Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als A orthogonaal diagonaliseerbaar is, dan is A^2 ook orthogonaal diagonaliseerbaar.
6. a) Laat A een $m \times n$ matrix zijn en laat B een $n \times p$ matrix zijn. Toon aan: als de kolommen van B lineair afhankelijk zijn, dan zijn de kolommen van AB ook lineair afhankelijk.
- b) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn. Laat H en K deelruimten zijn van V . Toon aan: $H \cap K$, de doorsnede van H en K , is ook een deelruimte van V .
- c) Een zogenaamde Householder matrix heeft de vorm $Q = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, waarbij $\mathbf{u}$ een eenheidsvector is in $\mathbb{R}^n$. Toon aan dat Q een orthogonale matrix is.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 2	3 : a) 2	4 : a) 4	5 : 7	6 : a) 2
b) 2	b) 3	b) 2	b) 3		b) 3
c) 4	c) 2	c) 2	c) 2		c) 3
8	7	6	9	7	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$