# Uitwerking Tentamen Lineaire Algebra voor BWI 16-12-'03

1\. a) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$ (Row A = Row U.)

Twee pivots, dus rang $A = 2$.

Kies als basis voor Row A : $\{(1,-1,3), (0,1,2)\}$.

1\. b) zie a) $A\underline{x} = \underline{0} \to U\underline{x} = \underline{0}$. Kies $x_3$ vrij; dan $x_2 = -2x_3$ en $x_1 = x_2 - 3x_3 = -5x_3$. Kies als basis $\{(-5,-2,1)\}$.

1\. c) $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 7 & 14 \\ 15 & 14 & 103 \end{pmatrix}$ $\quad A^T\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

Los op: $A^TA\hat{\underline{x}} = A^T\underline{b} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus alle kleinste-kwadratenopl: $\hat{x} = (0,1,0) + c\cdot(-5,-2,1) \quad c \in \mathbb{R}$.

2\. a) $B\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1\cdot\underline{x}$. Dus $\underline{x}$ een eigenvector bij eigenwaarde $-1$.

2\. b) $\left| B - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -6 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = -1$.

$(B - 2\cdot I)\underline{x} = \underline{0} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus alle opl. zijn: $\underline{x} = (0,1,0)\cdot c$ met $c \in \mathbb{R}$. Basis van $E_2$: $\{(0,1,0)\}$

2\. c) Neen. Er is geen basis voor $\mathbb{R}^3$ te vinden met eigenvectoren van B, want bij $\lambda = 2$ vindt men slechts 1 onafh. eigenvector.

3\. a) Kies $p(t) = a + bt + ct^2$ willekeurig. Dan $T(p) = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b+c \\ -b-c \end{pmatrix} =$

$= a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (b+c)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $b+c \in \mathbb{R}$. Een basis voor het beeld van T is bv $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

3. b) Kies $p(t) = a + bt + ct^2$ willekeurig. $T(p) = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b + c \\ -b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ levert $a = 0$, $b + c = 0$. Dus:
$p(t) = bt - bt^2$ $b \in \mathbb{R}$. Dus de dimensie van kern $T$ is 1.

3. c) Neen. $T(p) = \underline{0}$ heeft niet uitsluitend $p \equiv 0$ als oplossing.
Neen. Het bereik van $T$ is tweedimensionaal, dus niet heel $\mathbb{R}^3$.

4. a) Eerst een orthogonale basis. Kies $\underline{v}_1 = (1,1,1,1)$. Dan:

$$\underline{v}_2 = (3,1,1,3) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) = (1,-1,-1,1) \quad \text{en vervolgens}$$

$$\underline{v}_3 = (5,0,2,3) - \frac{10}{4}(1,1,1,1) - \frac{6}{4}(1,-1,-1,1) = (1,-1,1,-1).$$

Dus een orthonormale basis: $\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\}$.
$= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$.

4. b) $\underline{w}_1 = (w \cdot u_1)\underline{u}_1 + (w \cdot u_2)\underline{u}_2 + (w \cdot u_3)\underline{u}_3 =$

$$= 2 \cdot (\underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3) = (3,-1,1,1). \text{ Dus } \underline{w}_2 = (1,1,-1,-1).$$

4. c) $\|\underline{w} - \underline{w}_1\| = \|\underline{w}_2\| = 2$.

5. a) Waar. Er zijn dan $m$ onafh. kolommen uit $\mathbb{R}^m$, dus die spannen heel $\mathbb{R}^m$ op ($\text{Col}\,A = \mathbb{R}^m$). Dus $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft altijd oplossingen

5. b) Niet waar. Kies bv $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dan $A^TA = I_2$, maar $A$ niet vierkant.

5. c) Waar. Als $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ en $\lambda$ een complexe eigenwaarde, dan $(A + I)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \underline{x} = (\lambda + 1)\underline{x}$. Dus $\lambda + 1$ een eigenwaarde van $A + I$. Als $\lambda$ complex, dan $\lambda + 1$ ook complex.

5. d) Als $A$ orthogonaal diagonaliseerbaar, dan $A$ symmetrisch, dus $A = A^T$. Maar dan: $(A^2)^T = (A \cdot A)^T = A^TA^T = A \cdot A = A^2$.
Dus $A^2$ ook symmetrisch en dus ook orthogonaal diagonaliseerbaar.

6. a) De kolommen van $B$ zijn lineair afhankelijk, dus $\exists\ \underline{x} \neq \underline{0}$, zó dat $B\underline{x} = \underline{0}$. Maar dan ook $A \cdot B\,\underline{x} = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$. Dus de kolommen van $AB$ zijn ook afhankelijk

6. b) ① $H$ en $K$ zijn deelruimten van $V$, dus $\underline{0} \in H$ en $\underline{0} \in K$. Dus $\underline{0} \in H \cap K$.
② Kies $\underline{u}$ en $\underline{v} \in H \cap K$ willekeurig. Dan $\underline{u} \in H$ én $\underline{u} \in K$ en ook $\underline{v} \in H$ én $\underline{v} \in K$. Dus $\underline{u}+\underline{v} \in H$ en $\underline{u}+\underline{v} \in K$. Dus $\underline{u}+\underline{v} \in H \cap K$.
③ Kies $\underline{u} \in H \cap K$ willekeurig en $c \in \mathbb{R}$. Dan $\underline{u} \in H$ én $\underline{u} \in K$, dus ook $c\underline{u} \in H$ en $c\underline{u} \in K$, dus $c\underline{u} \in H \cap K$.
Uit ①-③ volgt dat $H \cap K$ een deelruimte is van $V$.

6. c) Ten eerste is $Q$ $n \times n$, dus vierkant.
Vervolgens: $Q^TQ = (I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T)^T(I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T) =$

$$= (I_n^T - 2(\underline{u}^T)^T\underline{u}^T) \cdot (I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T) =$$

$$= (I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T)(I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T) =$$

$$= I_n I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T I_n + 4\,\underline{u}\underbrace{\underline{u}^T\underline{u}}_{=1}\underline{u}^T =$$

$$= I_n - 4\underline{u}\underline{u}^T + 4\underline{u}\underline{u}^T = I_n.$$

Dus $Q$ is een orthogonale matrix.

---

De Herkansing vindt plaats op 10 februari 2004.