

1. Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= p \\ -2x - 3y + p^2z &= -1 \end{cases}$$

Hierin zijn x, y en z de onbekenden en is p een reële parameter.

- a) Voor welke waarde(n) van p heeft dit stelsel precies één oplossing?
- b) Voor welke waarde(n) van p heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen.

Verklaar je antwoorden.

2. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Ga na of de volgende beweringen waar zijn:

- a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is een onafhankelijk stelsel;
- b) $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^4$;
- c) de vectorvergelijking $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$ heeft een unieke oplossing.

3. De matrix A is gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de LU-factorisatie van A .
- b) Geef een basis voor de nulruimte van A .
- c) Bereken de matrix UU^T en $\det(UU^T)$.
- d) Onderzoek of de matrix AA^T inverteerbaar is.

Z.O.Z.

4. Laat $M_{2 \times 2}$ de vectorruimte zijn van alle 2×2 matrices. Definieer $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ door $T(A) = A + A^T$, waarbij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
 - Geef een basis voor de kern van T .
 - Toon aan dat het bereik (range) van T precies uit alle symmetrische 2×2 matrices bestaat.
5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- Laat A een 3×2 matrix zijn. Als iedere kolom een pivotpositie heeft, dan heeft de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ een unieke oplossing.
 - Laat A een 2×2 matrix zijn. Als $A^2 = A$, dan is $A = I_2$ (de identiteitsmatrix) of $A = O$ (de nulmatrix).
 - Voor alle 2×2 matrices A geldt: $\det(2A) = 2 \det(A)$.
6.
 - Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Toon aan: als $A + A^2 = I_n$ (de $n \times n$ identiteitsmatrix), dan is A inverteerbaar.
 - $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen $\mathbf{p}$ van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom. Gegeven is de verzameling $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}_2$ door
- $$\mathcal{B} = \{1 - 2t, 2t + t^2, -3 + t^2\}.$$
- Toon aan dat $\mathcal{B}$ de ruimte $\mathbb{P}_2$ opspant.
 - Is $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathbb{P}_2$? Verklaar je antwoord.

Normering:

1 : 4	2 : 5	3 : a) 3 b) 2 c) 2 d) 2	4 : a) 2 b) 2 c) 3	5 : 5	6 : a) 2 b) 4
_____	_____	_____	_____	_____	_____
4	5	9	7	5	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$