

# Uitwerking Tentamen Lineaire Algebra voor BWI 21-10-03

$$\textcircled{1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & p \\ -2 & -3 & p^2 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & p-2 \\ 0 & -1 & p^2-4 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & p-2 \\ 0 & 0 & p^2-9 & 3-p \end{array} \right)$$

- a) Precies één oplossing als er 3 pivots zijn, dus als  $p^2-9 \neq 0$ , dus  $p \neq \pm 3$ .  
 b) Oneindig veel oplossingen als  $p^2-9=0$  en  $3-p=0$ , dus als  $p=3$ . In dat geval zijn er vrije variabelen en is er geen sprake van een strijdig stelsel.

$$\textcircled{2} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad [\text{Voor het gemak zijn } v_1 \text{ en } v_2 \text{ verwisseld.}]$$

- a) Waar. Er zijn drie spalten, dus het stelsel is onafhankelijk.  
 b) Niet Waar. Die vectoren kunnen nooit  $\mathbb{R}^4$  opspannen.  
 c) Waar. Er is een oplossing, nl.  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ , en er zijn niet meer oplossingen, want  $\{v_1, v_2, v_3\}$  is een onafhankelijke verzameling.

$$\textcircled{3} \text{ a) } A \sim \left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = U \text{ en } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- b)  $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(U)$ . Bepaal dus  $Ux = 0$ . Kies  $x_3$  en  $x_4$  vrij. Dan:  
 $x_2 = -x_3 + 2x_4$  en  $2x_1 = x_2 - 3x_3 - x_4 = -4x_3 + x_4$ . Dus  $x = x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(1, 2, 0, 1)$ .  
 Dus een basis voor  $\text{Nul}(A) = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ .

$$\text{c) } UU^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Dus } \det(UU^T) = 0.$$

- d)  $\det(AA^T) = \det(LU(LU)^T) = \det(LUU^TL^T) = \det L \cdot \det UU^T \cdot \det L^T = 0$ .  
 Dus de matrix  $AA^T$  is niet inverteerbaar.

- $\textcircled{4}$  a) Kies  $A, B \in M_{2 \times 2}$  en  $c \in \mathbb{R}$  willekeurig. Dan:  
 1)  $T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = (A+A^T) + (B+B^T) = T(A) + T(B)$ .  
 2)  $T(cA) = (cA) + (cA)^T = cA + cA^T = c(A+A^T) = c \cdot T(A)$ .  
 Dus  $T$  is een lineaire afbeelding.