



Faculteit der Exacte Wetenschappen

Tentamen Lineaire Algebra voor BWI

Afdeling Wiskunde

13:30-16:30 uur

Vrije Universiteit

28-04-2003

1. De matrix  $A$  en de vectoren  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{y}$  worden gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Aan welke relaties moeten  $b_1, b_2, b_3$  en  $b_4$  voldoen, opdat het stelsel  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  consistent is?
- Bepaal de rang van  $A$  en geef een basis voor de nulruimte van  $A$ .
- Bereken alle kleinste-kwadraten oplossingen van het stelsel  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

2. De matrix  $B$  is gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat 1 een eigenwaarde van  $B$  is; bepaal een bijbehorende eigenvector.
- Laat zien dat  $B$  diagonaliseerbaar is.
- Bepaal de inverse van  $B$ .

3.  $\mathbb{P}_3$  is de vectorruimte van alle polynomen  $\mathbf{p}$  van de graad kleiner dan of gelijk aan 3, inclusief het nulpolynoom.

- Wat is de dimensie van  $\mathbb{P}_3$ ? Motiveer je antwoord met het aangeven van een basis.
- Laat zien dat het stelsel polynomen

$$\{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\}$$

lineair onafhankelijk is in  $\mathbb{P}_3$ .

We beschouwen verder de lineaire afbeelding  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeven door:

$$T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(2) \end{pmatrix}.$$

- Is  $T$  injectief (one-to-one)?  
Is  $T$  surjectief (onto)?  
[Motiveer je antwoorden.]

**Z.O.Z.**

4. De deelruimte  $V \subset \mathbb{R}^4$  wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Verklaar waarom  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  een basis is voor  $V$ .
- Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor  $V$ .

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- Laat  $A$  een  $3 \times 3$  matrix zijn en laat  $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$  vectoren uit  $\mathbb{R}^3$  zijn. Als  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  een unieke oplossing heeft, dan heeft  $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$  ook een unieke oplossing.
- $A$  en  $B$  zijn gelijkvormige (similar) matrices. Als  $A^2 = O$  (de nulmatrix) dan is ook  $B^2 = O$ .
- Laat  $A$  een  $n \times n$  matrix zijn. Als  $A^2 = A$  en  $\lambda$  is een eigenwaarde van  $A$ , dan geldt  $\lambda = 0$  of  $\lambda = 1$ .
- $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  is een verzameling lineair onafhankelijke vectoren in  $\mathbb{R}^3$ . Als  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  en  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ , dan geldt ook  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ .
- Als  $\mathbf{x}_1 = (1, 1)$  en  $\mathbf{x}_2 = (1, -1)$  eigenvectoren zijn van een  $2 \times 2$  matrix  $A$ , dan is  $A$  symmetrisch.

6. Bewijs onderstaande uitspraken:

- Laat  $T$  een lineaire afbeelding zijn van  $\mathbb{R}^n$  naar  $\mathbb{R}^n$ . Als  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  een lineair afhankelijke verzameling in  $\mathbb{R}^n$  is, dan is  $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$  ook een lineair afhankelijke verzameling in  $\mathbb{R}^n$ .
- $V$  is de verzameling van alle vectoren  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  waarvoor  $x_2 = x_3 = 0$ . Dan is  $V$  een deelruimte van  $\mathbb{R}^4$ .

#### Normering:

|          |          |          |          |        |          |
|----------|----------|----------|----------|--------|----------|
| 1 : a) 3 | 2 : a) 2 | 3 : a) 1 | 4 : a) 2 | 5 : 10 | 6 : a) 3 |
| b) 2     | b) 3     | b) 3     | b) 3     |        | b) 3     |
| c) 4     | c) 3     | c) 3     |          |        |          |
| <hr/>    | <hr/>    | <hr/>    | <hr/>    | <hr/>  | <hr/>    |
| 9        | 8        | 7        | 5        | 10     | 6        |

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$