

Uitwerking Tentamen Lineaire Algebra 28 april 2003

$$1) a) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & b_1 \\ 1 & 3 & 4 & b_2 \\ 0 & 5 & 1 & b_3 \\ 1 & 8 & 5 & b_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & b_1 \\ 0 & 5 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 5 & 1 & b_3 \\ 0 & 10 & 2 & b_1+b_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & b_1 \\ 0 & 5 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4-b_1-2b_2 \end{array} \right)$$

Dus er moet gelden: $b_3 - b_1 - b_2 = 0$ en $b_4 - b_1 - 2b_2 = 0$.

1) zie onderdeel a) : $\text{rang } A = 2$, want er zijn 2 pivots.

$A\bar{x} = \underline{0} \sim U\bar{x} = \underline{0}$ - Kies bv. x_3 vrij. Dan: $5x_2 + x_3 = 0$, dus $x_2 = -\frac{1}{5}x_3$
 $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$, dus $x_1 = +2x_2 - 3x_3 = -\frac{17}{5}x_3$. Basis: $\{(-17, -1, 5)\}$.

c) Stel $\bar{x}$ is een kleinste kwadraten oplossing: $A^T A \bar{x} = A^T y$. Dus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 9 & 102 & 51 \\ 12 & 51 & 51 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kortom: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 34 & 17 & 5 \\ 4 & 17 & 17 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Alle oplossingen zijn dus van de vorm: $\bar{x} = (-4, 0, 1) + C \cdot (-17, -1, 5)$, $C \in \mathbb{R}$

$$2) a) (B - 1 \cdot I) \underline{x} = \underline{0}, \text{ dus } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dus } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dus $\underline{x} = (2, 1, 0) \cdot C$, $C \in \mathbb{R}$, dus 1 is een eigenwaarde en een bijbehorende eigenvector is bijvoorbeeld $(2, 1, 0)$.

$$b) \text{ Berekend } |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - (1+\lambda) + (2-\lambda)(\lambda(\lambda+1)-2) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 3 = (1-\lambda)(\lambda^2-3) = 0$$

Dus $\lambda = 1$, $\lambda = \sqrt{3}$ en $\lambda = -\sqrt{3}$ zijn eigenwaarden van B . B heeft dus (drie) verschillende eigenwaarden en is zodoende diagonaliseerbaar.

[Immers, elke eigenwaarde geeft een eigenvector, waardoor er een basis voor $\mathbb{R}^3$ te vinden is, bestaand uit eigenvectoren van B .]

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \quad \text{Dus } B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3 a) dim $P_3 = 4$. Een (standaard) basis is $\{1, x, x^2, x^3\}$

b) Bepaal $c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(x^2+x^3) = 0 \quad (\forall x)$
 Vergelijken van coëfficiënten van x levert: $c_1 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, en $c_2 + c_3 = 0$
 en $c_3 = 0$. Dus $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dus $\{1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$ is een onafh-
 hangelijk stelsel. [kan ook via overeenkomstige vectoren in $\mathbb{R}^4$].

c) (i) T niet injectief, want $T(p) = 0$ heeft buiten $p \equiv 0$, bijvoorbeeld
 ook nog $p(x) = x(x-1)(x-2)$ als oplossing.
 (ii) T wel surjectief. Immers, kies $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, willekeurig uit P_3 .
 Dan geldt $T(p) = (a, a+b+c+d, a+c+d+cd) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
 De kolommen van A spannen heel $\mathbb{R}^3$ op, dus iedere willekeurige vector
 uit $\mathbb{R}^3$ is te verkrijgen als resultaat van $T(p)$.

4 a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Dus $\{v_1, v_2, v_3\}$ is een lineair
 onafhankelijk stelsel, dat
 V opspant. Dus een basis van V .

b) Merk eerst op dat $v_1 \perp v_2$. Kies nu $x_1 = v_1$ en $x_2 = v_2$. Dan volgt:

$$x_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{v_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Een orthogonale basis van V is dus te $\{(1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (-2, 1, 3, 3)\}$.

5 a) Als $Ax = b$ een unieke oplossing heeft, dan zijn er geen vrije variabelen. Omdat A vierkant is, volgt hieruit dat A inverteerbaar is. Maar dan is $Ax = c$ ook uniek oplosbaar. Dus: WAAR

b) Als A en B gelijkvormig zijn, dan bestaat er een inverteerbare matrix P zo dat $B = P^{-1}AP$. Dus $B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}CP = C$. Dus WAAR

c) Als λ een eigenwaarde is van A , dan is er een $x \neq 0$ zdd $Ax = \lambda x$. Dus $\lambda x = Ax = A^2x = \lambda^2 x$. Dus $(\lambda - \lambda^2)x = 0$. Dus $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$, want $x \neq 0$. Dus WAAR

d) Kies $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ en $w = (0, 1, 1)$. Dan $u \cdot v = 0$, $u \cdot w = 0$, maar $v \cdot w = 1 \neq 0$. Dus NIET WAAR

e) Er geldt $x_1 \cdot x_2 = 0$, dus x_1 staat loodrecht op x_2 . A is dus orthogonaal diagonaliseerbaar en is dus symmetrisch. Dus WAAR.

6 a) Omdat $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineair afhankelijk stelsel is, bestaan er c_1, c_2 en c_3 (niet alle nul) zo dat $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$. Maar dan dus $T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) = T(0)$, wat vanwege de lineariteit van T gelijk is aan $c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + c_3 T(v_3) = 0$. Dus $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ is ook een lineair afhankelijk stelsel.

b) Gegeven is $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$. We controleren dat

(1) De nulvector in V zit (kies $a = b = 0$)

(2) De som van twee elementen uit V weer in V zit:

$$(a_1, 0, 0, b_1) + (a_2, 0, 0, b_2) = (a_1 + a_2, 0, 0, b_1 + b_2)$$

(3) Een scalar maal een element uit V weer in V zit:

$$\lambda \cdot (a, 0, 0, b) = (\lambda a, 0, 0, \lambda b)$$

Kortom: V is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$.