

1. Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{b}$ door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

- Ga na waaraan b_2 t/m b_4 moeten voldoen, opdat de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is.
- Bepaal de rang van A en geef een basis voor de kolomruimte van A .
- Bepaal de dimensie van $(\text{col } A^T)^\perp$, het orthogonale complement van de kolomruimte van A^T .

2. Gegeven is de matrix B door

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Laat zien dat B niet inverteerbaar is.
- Laat zien dat $\lambda = -1$ een eigenwaarde is van B geef een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- Is B diagonaliseerbaar? Zo ja, geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D , zó dat $B = PDP^{-1}$.

3. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom. De verzameling $W \subset \mathbb{P}_2$ is gedefinieerd door

$$W := \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2 \text{ en } \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(2)\}.$$

- Toon aan dat W een lineaire deelruimte is van $\mathbb{P}_2$.
- Bepaal een basis voor W .

De lineaire afbeelding $T : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd door

$$T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de kern (kernel) van T .

Z.O.Z.

4. We beschouwen de lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ gedefinieerd door:

$$V := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor V .
- Bepaal de afstand van de vector $\mathbf{y} = (0, 0, 0, 12)$ tot de ruimte V .

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- A en B zijn symmetrische 2×2 matrices. Dan is ook AB symmetrisch.
- A en B zijn 3×3 matrices. Als $AB = I_3$, dan hebben A en B een pivot-positie in iedere kolom.
- $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ zijn vectoren uit $\mathbb{R}^n$. Als $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ loodrecht staat op $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ dan geldt: $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$.
- A is een symmetrische 2×2 matrix en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Als de kwadratische vorm $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ positief definit is, dan is $\mathbf{x}^T A^{-1} \mathbf{x}$ ook positief definit.

- A en B zijn $n \times n$ matrices. Als $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ slechts $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als oplossing heeft, dan heeft $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ook alleen de triviale oplossing. Bewijs dit.
 - $C[0, 1]$ is de vectorruimte van alle continue functies op $[0, 1]$. We definiëren voor $f, g \in C[0, 1]$:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)e^t dt.$$

- Bewijs dat $\langle f, g \rangle$ een inproduct op $C[0, 1]$ definieert.
- Bereken $\|e^{-t}\|$ ten opzichte van dit inproduct.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 2	3 : a) 3	4 : a) 4	5 : 8	6 : a) 3
b) 2	b) 3	b) 3	b) 3		b) 4
c) 2	c) 3	c) 2			
7	8	8	7	8	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$