Uitwerking Tentamen Lineaire Algebra voor BWI 16-12-2002

① a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 1 & b_2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & b_3 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & b_2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & b_3 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & b_3-3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-2b_3 \end{array}\right)$ (kan ook via extra stap)

Om consistent te zijn moet dus gelden $b_4 - 2b_3 = 0$.

b) zie a): rang $A = 3$ (3 pivots). Basis kolomruimte: $\{(1,1,0,-2), (4,5,3,-2), (-2,-6,0,4)\}$.

c) $(\text{col } A^T)^\perp = \text{Nul } A$; dimensie is dus $4-3=1$.

② a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, dus B niet inverteerbaar.

b) $(B + 1\cdot I)\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dus $\lambda = -1$ is een eigenwaarde.

En een basis van de bijbehorende eigenruimte is $\{(1,2,0), (-1,0,4)\}$.

c) Ja, immers: uit a) volgt $\lambda = 0$ is een eigenwaarde. De bijbehorende eigenruimte wordt opgespannen door $\{(1,2,1)\}$. Er is dus een basis te vinden voor $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van B.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

③ a) 1. De nulvector (het nulpolynoom) zit in W; immers daarvoor geldt $p(0) = p(2) = 0$.
2. Kies p, q willekeurig uit W; dan $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = p(2) + q(2) = (p+q)(2)$.
3. Kies $p \in W$ en $c \in \mathbb{R}$ willekeurig; dan $(cp)(0) = c \cdot p(0) = c \cdot p(2) = (cp)(2)$.

b) Algemeen geldt $p(t) = a + bt + ct^2$. $p(0) = p(2)$ geeft $a = a + 2b + 4c$, dus $b = -2c$. Dus W wordt opgespannen door $p(t) = a - 2ct + ct^2$, $a, c \in \mathbb{R}$. Dus door $\{1, -2t + t^2\}$. Deze polynomen zijn onafh., dus vormen een basis.

c) Gevraagd $T(p)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ met $p\in W$. Dus $p(1)=0$ én $p(t)=a-2ct+ct^2$. Dus $p(1)=a-c=0$; dus $a=c$. De kern van T wordt dus opgespannen door $\{1-2t+t^2\}$.

④ a) Kies als eerste vector $\underline{v}_1=(0,1,0,1)$. Dan vinden we $\underline{v}_2$ met:

$$\underline{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{(1,0,1,2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{(0,1,0,1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$ en daarna $\underline{v}_3$ met:

$$\underline{v}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{(0,1,0,1)\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{(0,1,0,1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{(4,1,0,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}{(1,-1,1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

b) Gevraagd $\|y-\hat{y}\|$, waarbij $\hat{y}$ de orthogonale projectie is van y op V.

$$\hat{y}=\frac{(0,0,0,12)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{(0,1,0,1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{(0,0,0,12)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}{(1,-1,1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{(0,0,0,12)\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{(3,1,-1,-1)\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\10\end{pmatrix}$$

Dus $\|y-\hat{y}\|=\|(0,-2,-4,2)\|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

⑤ a) Niet waar. Bv. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ dan $AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

b) Waar. Omdat A en B vierkant en $AB=I$, zijn A en B inverteerbaar (elkaars inverse) en hebben dus in iedere kolom een pivot-positie.

c) Waar. Als $(\underline{x}-\underline{y})^T(\underline{x}+\underline{y})=\underline{x}^T\underline{x}+\underline{x}^T\underline{y}-\underline{y}^T\underline{x}-\underline{y}^T\underline{y}=\underline{x}^T\underline{x}-\underline{y}^T\underline{y}=0$, dan volgt dus $\|x\|=\|y\|$.

d) Waar. A heeft positieve eigenwaarden, dus A^{-1} ook.

⑥ a) Als $AB\underline{x}=\underline{0}$ slechts de triviale oplossing heeft, dan is AB inverteerbaar. A en B zijn dan ook inverteerbaar, want A, B vierkant en $\det AB=\det A\cdot\det B\neq 0$. Dus ook $A\underline{x}=\underline{0}$ heeft slechts $\underline{x}=\underline{0}$ als oplossing.

6 b) (i) 1. $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$, 2. $\langle f_1+f_2,g\rangle = \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$
en 3. $\langle cf,g\rangle = c\langle f,g\rangle$ volgen simpel uit de rekenregels van integralen.

4. $\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)e^t\,dt \geq 0$, immers $f^2(t)e^t \geq 0$ op $[0,1]$.

$\langle f,f\rangle = 0$ levert $f^2(t)e^t = 0$ want f is een continue functie op $[0,1]$. Omdat $e^t > 0$ op $[0,1]$ volgt hieruit dat $f \equiv 0$.

(ii) $$\|e^{-t}\| = \sqrt{\langle e^{-t},e^{-t}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 e^{-t}\cancel{e^{-t}}\cancel{e^{t}}\,dt} =$$
$$= \sqrt{-e^{-t}\Big|_0^1} = \sqrt{1-\frac{1}{e}}\,.$$

u.

Het tentamencijfer wordt bepaald tot in 1 decimaal achter de komma. Het eindcijfer van het vak is het afgeronde tentamencijfer, waarbij het voortentamencijfer eventueel in is verwerkt.