

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- b) Bepaal de dimensie van $\text{Col } A$ (de kolomruimte van A) en geef een basis voor deze ruimte.
- c) (i) Laat zien dat $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 13 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A .
Wat is de corresponderende eigenwaarde?
(ii) Bereken vervolgens alle eigenwaarden van A .
- d) Verklaar waarom A diagonaliseerbaar is.

2. De matrix B is gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -6 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$



- a) Bereken $\det B$ en $\det(B^T B)$.
- b) Bepaal de inverse van B .

3. De deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Verklaar waarom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een basis is voor V .
- b) Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor V .
- c) Gegeven is de vector $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bepaal het punt in V dat het dichtst ligt bij $\mathbf{y}$ en bepaal de afstand van $\mathbf{y}$ tot dat punt.

Z.O.Z.

4. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het inconsistente stelsel

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + y = 0 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Gegeven: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Als $\mathbf{v}_3$ niet te schrijven is als lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$, dan is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een onafhankelijke verzameling.
- b) A is een 3×3 matrix. Als $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ en $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, dan heeft de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oneindig veel oplossingen.
- c) V is de vectorruimte van alle 2×2 matrices. H is de verzameling van alle inverteerbare 2×2 matrices. Dan is H een deelruimte van V .
- d) A is een 3×3 matrix. Als $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ onafhankelijke eigenvectoren zijn van A , dan zijn de corresponderende eigenwaarden verschillend.
- e) Als U een orthogonale matrix is, dan is $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

6. a) A is een inverteerbare en orthogonaal diagonaliseerbare matrix. Toon aan dat A^{-1} ook een orthogonaal diagonaliseerbare matrix is.
- b) V en W zijn vectorruimten en $T : V \rightarrow W$ is een lineaire afbeelding. $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ is een deelverzameling van V . Bewijs: als $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ afhankelijk is, dan is $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_p)\}$ ook een afhankelijke verzameling.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 3	3 : a) 2	4 : 5	5 : 8	6 : a) 3
b) 2	b) 4	b) 3			b) 3
c) 3		c) 4			
d) 2					
10	7	9	5	8	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$



$$\textcircled{1} \text{ a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Kies x_3 vrij. Dan $x_2 = 1 - x_3$ en $x_1 = 3 - x_3$. Dus $\underline{x} = (3, 1, 0) + x_3 \cdot (-1, -1, 1)$ ($x_3 \in \mathbb{R}$)

b) Zie a): er zijn twee pivots, dus $\dim \text{Col } A = 2$. Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{c) } A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -114 \\ 78 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 13 \end{pmatrix} = 6\underline{x}; \text{ dus } \underline{x} \text{ eigenvector bij eigenwaarde } 6$$

$$\text{(ii) } \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -4 & 7-\lambda & 3 \\ 3 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(7-\lambda)(-1-\lambda)+12] + 2[-4(-1-\lambda)-9] - 1[16-3(7-\lambda)] =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-6) = 0$$

Dus $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = 6$

[N.B. $\lambda = 6$ weten we al van c); $\lambda = 0$ volgt uit a); de regel $\text{trace } A = \sum \lambda_i$ geeft dan $1 + 7 + (-1) = 7 = 0 + 6 + \lambda_3$, dus de derde eigenw is 1]

d) Als een 3×3 matrix 3 verschillende eigenw heeft, dan is die diagonaliseerbaar.

$$\textcircled{2} \text{ a) } |B| = -2(-24 + 18) - 2(32 - 30) + 3(12 - 15) = 12 - 4 - 9 = -1$$

$$\det B^T B = \det B^T \cdot \det B = \det B \cdot \det B = (-1)^2 = 1$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & -8 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -12 & -14 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \text{ Dus } B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ is dus lineair onafhankelijk. $\underline{v}_3$ wordt opgespannen door, dus $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ vormt een basis voor V .