



$$\textcircled{1} \text{ a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Kies x_3 vrij. Dan $x_2 = 1 - x_3$ en $x_1 = 3 - x_3$. Dus $\underline{x} = (3, 1, 0) + x_3 \cdot (-1, -1, 1)$ ($x_3 \in \mathbb{R}$)

b) Zie a): er zijn twee pivots, dus $\dim \text{Col } A = 2$. Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{c) } A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -114 \\ 78 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 13 \end{pmatrix} = 6\underline{x}; \text{ dus } \underline{x} \text{ eigenvector bij eigenwaarde } 6$$

$$\text{(ii) } \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -4 & 7-\lambda & 3 \\ 3 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(7-\lambda)(-1-\lambda)+12] + 2[-4(-1-\lambda)-9] - 1[16-3(7-\lambda)] =$$

$$= -\lambda^2 + 7\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-6) = 0$$

Dus $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = 6$

[N.B. $\lambda = 6$ weten we al van c(i); $\lambda = 0$ volgde uit a); de regel $\text{trace } A = \sum \lambda_i$ geeft dan: $1 + 7 + (-1) = 7 = 0 + 6 + \lambda_3$, dus de derde eigenw is 1]

d) Als een 3×3 matrix 3 verschillende eigenw heeft, dan is die diagonaliseerbaar.

$$\textcircled{2} \text{ a) } |B| = -2(-24 + 18) - 2(32 - 30) + 3(12 - 15) = 12 - 4 - 9 = -1$$

$$\det B^T B = \det B^T \cdot \det B = \det B \cdot \det B = (-1)^2 = 1$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & -8 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -12 & -14 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \text{ Dus } B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ is dus lineair onafhankelijk. $\underline{v}_4$ wordt opgespannen hierdoor, dus $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ vormt een basis voor V .

b) $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ staan al loodrecht op elkaar. Kies $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{u}_2 = \underline{v}_2$ en

$$\underline{\tilde{u}}_3 = \underline{v}_3 - \frac{\underline{v}_1^T \underline{v}_3}{\underline{v}_1^T \underline{v}_1} \underline{v}_1 - \frac{\underline{v}_2^T \underline{v}_3}{\underline{v}_2^T \underline{v}_2} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \underline{u}_3$$

Dan vormt $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ een orthogonale basis voor V

c) Het betreffende punt is $\hat{y}$, de orthogonale projectie van y op V .

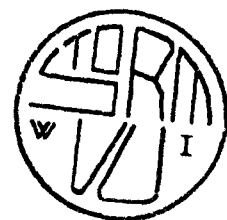
$$\hat{y} = \frac{\underline{y}^T \underline{u}_1}{\underline{u}_1^T \underline{u}_1} \underline{u}_1 + \frac{\underline{y}^T \underline{u}_2}{\underline{u}_2^T \underline{u}_2} \underline{u}_2 + \frac{\underline{y}^T \underline{u}_3}{\underline{u}_3^T \underline{u}_3} \underline{u}_3 = \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|y - \hat{y}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}.$$

④ $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{b}$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix} \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } \underline{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



⑤ a) Onjuist. Kies $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Juist. $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft meer dan 1 oplossing, dus er zijn vrije variabelen. Die zijn er dan ook bij $A\underline{x} = \underline{0}$.

c) Onjuist. De 0-vektor (de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) zit al niet in H .

d) Onjuist. Kies bv $A = I_3$ en $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De vectoren zijn onafhankelijk, maar horen beide bij eigenwaarde 1.

e) Juist. Immers $\|Ux\|^2 = (Ux)^T (Ux) = x^T U^T U x = x^T x = \|x\|^2$

⑥ a) A orth. diag. $\Leftrightarrow A$ symmetrisch. Verder $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, dus ook A^T symmetrisch en dus ook orth. diagonaliseerbaar.

b) Omdat $\{v_1, \dots, v_p\}$ lin. afh. bestaan er $c_1, \dots, c_p$, niet alle 0, zo dat $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$. Plaats dan dus $T(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = T(0)$, dus $c_1 T(v_1) + \dots + c_p T(v_p) = 0$. Dus $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ lin. afh.