

1. Gegeven is de matrix A en zijn LU decompositie door:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU.$$

- Bepaal de dimensie van $\text{Col } A$ (de kolomruimte van A) en geef een basis voor deze ruimte.
- Bepaal de dimensie van $\text{Nul } A$ (de nulruimte van A) en geef een basis voor deze ruimte.

2. Beschouw het stelsel differentievergelijkingen

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.4x_k - 0.3y_k \\ y_{k+1} = 0.4x_k + 1.2y_k \end{cases}$$

- Stel $\mathbf{u}_k = (x_k, y_k)$. Schrijf het stelsel om tot $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$ en bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A .
- Bepaal de algemene oplossing $\mathbf{u}_k$ van het stelsel.
- Gegeven is de beginvector $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0) = (1, 2)$. Bepaal de evenwichtstoestand (steady-state vector) van het stelsel.
- Verklaar waarom de matrix A^k nadert tot de matrix

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.75 \\ 1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

als $k \rightarrow \infty$.

3. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom.

- Laat zien dat het stelsel polynomen

$$\mathcal{B} = \{1 + 2x - x^2, 2 + 2x^2, 3 - 4x\}$$

lineair onafhankelijk is in $\mathbb{P}_2$.

- Licht toe dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathbb{P}_2$.
- Bepaal $[x^2]_{\mathcal{B}}$, de coördinaatvector van x^2 t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.

Z.O.Z.

4. Het vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthonormale basis voor V .
b) Bepaal een basis voor $V^\perp$, het orthogonale complement van V .

De vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- c) Bepaal $\hat{\mathbf{y}}$, de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op V .

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) A is een 3×3 matrix. Als de vergelijking $A\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ een unieke oplossing heeft, dan is A inverteerbaar.
b) Als een matrix U orthonormale kolommen heeft, dan geldt $UU^T = I$.
c) De kwadratische vorm $Q(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ is positief definitief.

6. a) $C[0, 1]$ is de vectorruimte van alle continue reële functies op het gesloten interval $[0, 1]$. V is de verzameling gedefinieerd door

$$V := \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1)\}.$$

Toon aan: V is een deelruimte van $C[0, 1]$.

- b) A is een $m \times n$ matrix met onafhankelijke kolommen.
Toon aan dat de matrix $A^T A$ inverteerbaar is.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 3	5 : 7	6 : a) 3
b) 3	b) 1	b) 1	b) 2		b) 4
	c) 3	c) 3	c) 3		
	d) 4				
5	11	7	8	7	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$