Uitwerking tentamen Lineaire Algebra voor BWI 17-12-2001

1 a) $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Col} U = 3$, want U heeft 3 pivots

Basis voor Col A : $\{(3,-3,6,-9), (-7,5,-4,5), (-2,1,0,-5)\}$

b) $\dim \operatorname{Nul} A = 4 - \dim \operatorname{Col} A = 1$. $A\underline{x} = \underline{0} \sim U\underline{x} = \underline{0}$. Kies x_4 vrij, dan: $x_3 = x_4$ $x_2 = \frac{1}{2}x_4$ en $x_1 = \frac{7}{6}x_4$. Basis voor Nul A : $\{(7,3,6,6)\}$

2 a) $A = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = (0.4-\lambda)(1.2-\lambda) + 0.12 = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6$

Dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0.6$

eigenvectoren : $(A - I)\underline{x}_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}_1 = (1,-2)$

$(A - 0.6I)\underline{x}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}_2 = (3,-2)$

b) $\underline{u}_k = c_1 \cdot \lambda_1^k \underline{x}_1 + c_2 \lambda_2^k \underline{x}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 (0.6)^k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, waaruit volgt $c_1 = -2$ en $c_2 = 1$

$\underline{u}_\infty = \lim_{k\to\infty} \underline{u}_k = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $A^k = P D^k P^{-1}$ met $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.6)^k \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Dus $A^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

3 a) $c_1(1 + 2x - x^2) + c_2(2 + 2x^2) + c_3(3 - 4x) = 0$ levert

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$, $2c_1 - 4c_3 = 0$, $-c_1 + 2c_2 = 0$ dus $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

b) De polynomen uit B zijn onafhankelijk en spannen $\mathbb{P}_2$ op, want $\dim \mathbb{P}_2 = 3$

c) $c_1(1 + 2x - x^2) + c_2(2 + 2x^2) + c_3(3 - 4x) = x^2$ levert

$c_1 = -\frac{2}{7}$, $c_2 = \frac{5}{14}$, $c_3 = -\frac{1}{7}$. Dus $[x^2]_B = (-\frac{2}{7}, \frac{5}{14}, -\frac{1}{7})$

4 a) Eerst orthogonaal: $\underline{x}_1 = \underline{v}_1$ en $\underline{x}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\underline{v}_2 \circ \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \circ \underline{v}_1}\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Nu orthonormaliseren: $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\} = \left\{\frac{\underline{x}_1}{\|\underline{x}_1\|}, \frac{\underline{x}_2}{\|\underline{x}_2\|}\right\} = \left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

b) Voor alle $\underline{x} \in V^\perp$ moet gelden $\underline{v}_1 \circ \underline{x} = 0$ én $\underline{v}_2 \circ \underline{x} = 0$, dus $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\3 & 0 & 3\end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, waaruit volgt $\underline{x} = \alpha \cdot (-2, 1, 2)$. Dus een basis voor $V^\perp$: $\{(-2,1,2)\}$.

c) $\hat{y} = (\underline{y} \circ \underline{u}_1) \cdot \underline{u}_1 + (\underline{y} \circ \underline{u}_2) \cdot \underline{u}_2 = \frac{1}{3}\underline{u}_1 + \frac{2}{3}\underline{u}_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$.

5 a) WAAR. Als $A\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ een unieke oplossing heeft, dan zijn er geen vrije variabelen. A is dus vierkant en heeft in iedere kolom een pivot, dus A is inverteerbaar.

b) NIET WAAR. Kies bv $U = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ dan $UU^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \neq I$.

c) NIET WAAR. $Q(1,1) = 5 > 0$ en $Q(1,-1) = -1 < 0$.
(mag ook via eigenwaarden A).

6 a) (i) de nulfunctie $\in V$. (ii) Als f_1 en $f_2 \in V$, dan ook $f_1 + f_2 \in V$
(iii) als $\lambda \in \mathbb{R}$ en $f_1 \in V$, dan $\lambda f_1 \in V$
[bij (ii) & (iii): $(\lambda f_1 + \mu f_2)(0) = \lambda f_1(0) + \mu f_2(0) = \lambda f_1(1) + \mu f_2(1) = (\lambda f_1 + \mu f_2)(1)$]

b) Als A^TA inverteerbaar is, dan moet A^TA onafhankelijke kolommen hebben. Bekijk dus $A^TA\underline{c} = \underline{0}$; dan dus $\underline{c}^TA^TA\underline{c} = \underline{c}^T\underline{0} = 0$; dus $(A\underline{c})^T(A\underline{c}) = 0$ oftewel $\|A\underline{c}\|^2 = 0$. Omdat A onafhankelijke kolommen heeft is $A\underline{c} = \underline{0}$ dan en slechts dan als $\underline{c} = \underline{0}$.
Dus $A^TA\underline{c} = \underline{0}$ dan en slechts dan als $\underline{c} = \underline{0}$.