

1. Geef aan of de volgende uitspraken waar (T) of onwaar (F) zijn. Licht Uw antwoord toe.

- a) De vergelijking $\mathbf{x} = \mathbf{v} + t\mathbf{p}$ beschrijft een lijn door $\mathbf{p}$ parallel aan $\mathbf{v}$.
- b) Zij A een $n \times n$ -matrix. Als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn, dan vormen zij een basis van $\mathbb{R}^n$.
- c) Een vierkante matrix A is inverteerbaar dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$.
- d) Als B een echelon vorm van A is, dan vormen de pivot kolommen van B een basis voor $\text{Col } A$.
- e) Een rij operatie op A verandert de eigenwaarden niet.
- f) Als A orthogonaal is, dan is A symmetrisch.
- g) Als A een inverteerbare matrix is, dan geldt $(A^{-1})^{-1} = A$.
- h) Als U een $m \times n$ -matrix is met orthogonale kolommen, dan is $UU^T \mathbf{x}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{x}$ op $\text{Col } U$.

2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Breng A in echelon vorm.
- b) Wat is de rang van A ?
- c) Wat is $\dim \text{Nul } A$?
- d) Geef een basis voor $\text{Nul } A$.
- e) Bereken $\det(AA^T)$.

Z.O.Z.

3. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat

- a) $A^T A$ is symmetrisch.
- b) $A^T A$ is inverteerbaar.
- c) $A^T A$ is positief definit.

4. Zij A een $m \times n$ -matrix.

- a) Laat zien dat $A^T A$ symmetrisch is.
- b) Laat zien dat $A^T A$ positief semidefinit is.
- c) Laat zien dat als $\text{Nul } A = \{0\}$, $A^T A$ positief definit is.
- d) Laat zien dat als $\text{Nul } A = \{0\}$, $A^T A$ inverteerbaar is.

5. Zij A een inverteerbare $n \times n$ -matrix. Zij $\mathbf{v}$ een eigenvector van A met eigenwaarde λ .
Bewijs dat $A^n \mathbf{v} = \lambda^n \mathbf{v}$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

6. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Laat zien dat 7 een eigenwaarde van A is met multipliciteit 2.
- b) Laat zien dat $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ een eigenvector van A is.
- c) Vind P zo dat $P^{-1}AP$ diagonaal is. Bereken P^{-1} .

Normering:

Alle opgaven 15 punten,

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$