

NB. Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau. U mag gebruik maken van de tabellen van de normale en t-verdeling. Beide worden uitgedeeld. Ook mag u gebruik maken van een niet-programmeerbare rekenmachine.

Veel succes!

1. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2 .
 - (a) Bereken de momentenschatters voor μ en σ^2 .
 - (b) Veronderstel dat de variantie bekend is en $\sigma^2 = 1$. Bepaal de maximum likelihood schatter voor μ . De dichtheid van de normale verdeling met verwachting μ en variantie $\sigma^2 = 1$ is gelijk aan

$$f_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(x-\mu)^2}.$$

2. Als gevolg van het smelten van de poolkappen door de opwarming van de aarde, neemt het aantal ijsberen in het noordpoolgebied (N) af. Enkele biologen willen schatten hoeveel ijsberen er nog in het noordpoolgebied leven; ze willen dus N schatten. Ze gaan als volgt te werk. Ze vangen 2000 verschillende ijsberen, merken ze en zetten ze verspreid in het noordpoolgebied terug. Twee maanden later vangen ze 1000 ijsberen (dit keer worden de ijsberen direct na het vangen teruggezet; trekken met terugleggen). Definieer X_i gelijk aan 1 als de i -de ijsbeer een gemerkte ijsbeer was en 0 anders. Dan zijn $X_1, \dots, X_{1000}$ onderling onafhankelijk en alternatief (ook wel Bernoulli genoemd) verdeeld met onbekende parameter p ; dus $P(X_i = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ voor $x = 0$ of $x = 1$. De onbekende kans p is gelijk aan de fractie gemerkte ijsberen in het noordpoolgebied. De relatie tussen p en N is gelijk aan $p = 2000/N$.
 - (a) Laat zien dat de maximum likelihood schatter voor p , op basis van $X_1, \dots, X_{1000}$, gelijk is aan $\hat{p} = 1000^{-1} \sum_{i=1}^{1000} X_i$.
 - (b) Bereken de asymptotische variantie $1/(1000I(p))$ van $\hat{p}$.
 - (c) Geef een benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor p . Veronderstel dat we $\hat{p} = 0.1$ hebben gevonden. Geef het bijbehorend benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor p .

- (d) De onderzoeker vindt het betrouwbaarheidsinterval te breed. Geef twee manieren om een smaller interval te krijgen.
- (e) BONUS OPGAVE Geef met behulp van het interval in onderdeel (c) een benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor N ; het aantal ijsberen in het noordpoolgebied.
3. Volgens het Centraal Bureau voor de Statistiek is het geboortegewicht van pasgeboren baby's gemiddeld gelijk aan 3426 gram. Een verloskundige meet van 31 pasgeboren jongetjes het gewicht en noteert de waarnemingen als $X_1, \dots, X_{31}$. Het gemiddelde van deze waarnemingen is $\bar{x} = 3447$ en de steekproef standaard afwijking is gelijk aan $s_X = 134$ (de steekproef standaard afwijking is gelijk aan de wortel van de steekproef variantie). De verloskundige wil weten of het verwachte geboortegewicht van jongetjes hoger is dan de waarde die het CBS weergeeft. Veronderstel dat het geboortegewicht van jongetjes normaal verdeeld is met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2 .
- (a) Formuleer een geschikte nul- en alternatieve hypothese.
- (b) Toets de hypothese uit onderdeel (a) bij onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05. Geef de toetsingsgrootte en het kritieke gebied. Geef ook uw conclusie.

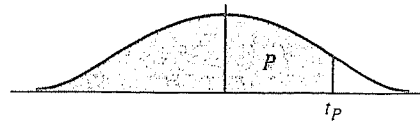
De verloskundige vermoedt dat meisjes bij de geboorte lichter zijn dan jongetjes. Daarom meet zij ook van 31 pasgeboren meisjes het gewicht en noteert deze waarnemingen als $Y_1, \dots, Y_{31}$. Zij vindt nu een gemiddelde van $\bar{y} = 3378$ en een steekproef standaard afwijking van $s_Y = 174$.

- (c) Veronderstel dat het geboortegewicht van meisjes normaal verdeeld is met onbekende verwachting ν en onbekende variantie σ^2 . Voer een geschikte toets uit om na te gaan of het vermoeden van de verloskundige dat meisjes bij geboorte lichter zijn dan jongetjes, klopt. Is dit een 1 steekproeventoets, een gepaarde twee-steekproeventoets of een ongepaarde twee-steekproeventoets? Gebruik een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0.05. Geef de nul- en de alternatieve hypothese, de toetsingsgrootte en het kritieke gebied. Geef ook uw conclusie.

Normering:

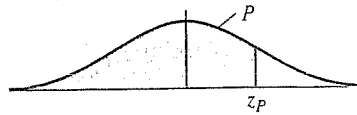
1(a):	4	2(a):	3	3(a):	1
1(b):	4	2(b):	3	3(b):	3
		2(c):	3	3(c):	4
		2(d):	2		
		2(e):	3		

Eindcijfer: (totaal + 3)/3

TABLE 4 Percentiles of the t Distribution

df	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

TABLE 2 Cumulative Normal Distribution—Values of P Corresponding to z_p for the Normal Curve



z is the standard normal variable. The value of P for $-z_p$ equals 1 minus the value of P for $+z_p$; for example, the P for -1.62 equals $1 - .9474 = .0526$.

[illegible]