

Tentamen Kansrekening en statistiek 1B voor MNW

26 oktober 2007, 8.45-10.45

- Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven. Er zijn 27 punten te behalen, het cijfer wordt gegeven door $(3 + \text{aantal punten})/3$.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden!
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan; het boek van Rice en aantekeningen mogen tijdens dit tentamen geraadpleegd worden.
- Als je een onderdeel van een opgave niet hebt kunnen maken, mag je het resultaat van dat onderdeel wel gebruiken bij een volgend onderdeel!
- Als je van een χ^2 of t-verdeling een aantal vrijheidsgraden nodig hebt dat niet in de tabel staat, mag je het aantal vrijheidsgraden uit de tabel gebruiken dat daar het dichtst bij ligt.
- Na correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke identiek verdeelde stochasten zijn met marginale dichtheidsfuncties

$$f_{X_i}(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x \geq 0, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

hierbij is λ een strict positieve parameter. Je mag in deze opgave gebruiken dat $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$.

(a) [2 punten] Laat zien dat de momenten-schatter van λ gegeven wordt door $1/\bar{X}$, met $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

(b) [(3 punten] Laat zien dat de meest aannemelijke schatter van λ (ook) gegeven wordt door $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$.

(c) [3 punten] Laat zien dat de asymptotische variantie van $\hat{\lambda}$ gelijk is aan $\frac{\lambda^2}{n}$.

(d) [3 punten] Bij een steekproef uit een exponentiële verdeling ter grootte van $n = 400$ heb ik $\bar{X} = 0,24$ geobserveerd. Geef met behulp van de vorige onderdelen een benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor λ .

Zie ommezijde!

2. In Shoemaker (1996) vinden we een dataset met lichaamstemperaturen van 65 mannen en een dataset met lichaamstemperaturen van 65 vrouwen. Van beide datasets zijn het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie uitgerekend, de resultaten vind je in onderstaande tabel (de temperaturen worden gegeven in °C).

geslacht	steekproefgemiddelde	steekproefvariantie
mannen	36.72	0.1507
vrouw	36.88	0.1707

We nemen aan dat alle observaties onafhankelijk van elkaar zijn en dat de lichaamstemperaturen van de mannen normaal verdeeld zijn met verwachting μ_M en variantie σ_M^2 en dat de lichaamstemperaturen van de vrouwen normaal verdeeld zijn met verwachting μ_V en variantie σ_V^2 . De parameters μ_M , σ_M^2 , μ_V en σ_V^2 zijn alle onbekend.

Bij de eerste twee onderdelen van deze opgave kijken we alleen naar de dataset van de mannen.

(a) [3 punten] Toets de nulhypothese dat $\mu_M = 37^\circ\text{C}$ versus de alternatieve hypothese dat $\mu_M \neq 37^\circ\text{C}$ met significantieniveau $\alpha = 0.05$. Vermeld in je antwoord in ieder geval de toetsingsgrootheid, de verdeling van de toetsingsgrootheid onder de nulhypothese, het kritieke gebied en je conclusie.

(b) [3 punten] Geef een (exact) betrouwbaarheidsinterval voor σ_M^2 .

(c) [3 punten] Toets nulhypothese dat $\mu_M = \mu_V$ versus de alternatieve hypothese dat $\mu_M \neq \mu_V$ met significantieniveau $\alpha = 0.05$. Vermeld in je antwoord in ieder geval weer de toetsingsgrootheid, de verdeling van de toetsingsgrootheid onder de nulhypothese, het kritieke gebied en je conclusie.

(d) [3 punten] Stel dat geldt dat $\mu_M - \mu_V = -0.1$. Wat is in dat geval het onderscheidend vermogen (in het Engels: power) van de toets die je bij het vorige onderdeel gebruikt hebt? Je mag bij dit onderdeel de normale verdeling in plaats van de t-verdeling gebruiken.

3. [4 punten] Ik wil graag onderzoeken of de dobbelsteen van mijn ganzenbordspel een eerlijke dobbelsteen is. Daarom heb ik 120 keer met deze dobbelsteen gegooid en het totaal aantal keren dat er 1, 2, 3, 4, 5 en 6 gegooid genoteerd met respectievelijk X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 en X_6 . Mijn observaties waren $X_1 = 25$, $X_2 = 15$, $X_3 = 19$, $X_4 = 14$, $X_5 = 21$ en $X_6 = 26$. Gebruik Pearson's chi-kwadraat toets om te toetsen of de dobbelsteen eerlijk is, neem daarbij als significantieniveau $\alpha = 0.05$. Vermeld in je antwoord de nulhypothese, de alternatieve hypothese, de toetsingsgrootheid, de verdeling van de toetsingsgrootheid onder de nulhypothese, het kritieke gebied en je conclusie.

Normering:

1: a) 8
b) 7
c) 7
+ —
22

2: a) 7
b) 8
c) 7
+ —
22

3: a) 7
b) 7
c) 8
+ —
22

4: 24

+ —
24

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$
