



Afdeling Wiskunde

Tentamen Kansrekening en Statistiek

Vrije Universiteit

22 augustus 2003

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mogen tijdens het tentamen geraadpleegd worden. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Succes!

1. Een vijver bevat N vissen. Het aantal N is onbekend, maar we weten wel dat $N > 100$. Het aantal vissen N is zo groot dat men onmogelijk alle vissen kan vangen om het te weten te komen. Men vangt daarom 100 vissen, voorziet ze van een merkteken en gooit ze terug. Enige tijd later vangt men weer 100 vissen (zonder ze tussendoor terug te gooien) en kijkt hoeveel er gemerkt zijn. Zij X het aantal gemerkte vissen in de tweede vangst.
 - (a) Het vangen van de 100 vissen (de tweede keer) en tellen hoeveel er gemerkt zijn, kunnen we opvatten als een kansexperiment. Stel een kansruimte op voor dit experiment.
 - (b) Beschouw de stochastische grootte X . Geef de verzameling W_X van alle mogelijke waarden van X en geef voor iedere $k \in W_X$ een uitdrukking voor de kans $\mathbb{P}(X = k)$.
 - (c) Merk op dat we X kunnen opvatten als een stochastische grootte met een kansverdeling die afhangt van een onbekende parameter N . Geef een uitdrukking voor de aannemelijkheidsfunctie (likelihood function).
2. Zij X een continu verdeelde stochastische grootte, met kansdichtheid f gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} Cx^3, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $C > 0$ een nog nader te bepalen constante is.

- (a) Bepaal C zodanig dat f een kansdichtheid is.
- (b) Bereken de verwachting $\mathbb{E}X$, het tweede moment $\mathbb{E}X^2$ en de variantie $\text{Var } X$ van X .

3. Zij (X, Y) een continu verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid $f_{(X,Y)}$ gegeven door

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & x \in (0, 1), y \in (0, \infty), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de marginale dichtheden van X en Y .
 (b) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht uw antwoord toe.
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijke, continue stochastische grootheden zijn, ieder met kansdichtheid f_θ gegeven door

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de aannemelijkheidsfunctie (likelihood function).
 (b) Geef de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}$ voor θ op basis van de waarnemingen $X_1, \dots, X_n$.
5. Een Bayesiaanse statisticus observeert n onafhankelijke, $N(\theta, 9)$ -verdeelde stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots, X_n$, waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is. De statisticus gelooft dat de parameter θ in de buurt van 1 moet liggen en neemt als a-priori verdeling voor θ een $N(1, 1)$ -verdeling.
- (a) Wat is de a-posteriori verdeling van θ , gegeven de waarnemingen $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$?
 (b) Geef de Bayes schatter $\hat{\theta}_n$ voor de parameter θ op basis van de waarnemingen $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$.

Normering:

1(a): 3 2(a): 3 3(a): 4 4(a): 3 5(a): 3
 1(b): 4 2(b): 3 3(b): 3 4(b): 4 5(b): 3
 1(c): 3

Eindcijfer = (totaal+4)/4