



Afdeling Wiskunde

Tentamen Kansrekening en Statistiek

Vrije Universiteit

2 juni 2003

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mogen tijdens het tentamen geraadpleegd worden. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Succes!

1. Uit een goed geschud kaartspel trekt men achtereenvolgens twee kaarten.
 - (a) Stel een kansruimte op voor dit experiment.
 - (b) Bereken de kans dat de eerste kaart een vrouw is en de tweede kaart een hartenkaart.
 - (c) Zijn de gebeurtenissen “eerste kaart een vrouw” en “tweede kaart een hartenkaart” onafhankelijk? Licht uw antwoord toe.

2. Zij X een continu verdeelde stochastische grootte, met kansdichtheid f gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} Cx(2-x), & x \in (0, 2), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $C > 0$ een nog nader te bepalen constante is.

- (a) Bepaal C zodanig dat f een kansdichtheid is.
 - (b) Bereken de verwachting $\mathbb{E}X$, het tweede moment $\mathbb{E}X^2$ en de variantie $\text{Var } X$ van X .
3. Zij (X, Y) een continu verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid $f_{(X,Y)}$ gegeven door

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 6xy - 6x^2y, & x \in (0, 1), y \in (0, 1), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de marginale dichtheden van X en Y .
 - (b) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht uw antwoord toe.

4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijke, continue stochastische grootheden zijn, ieder met kansdichtheid f_θ gegeven door

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta \frac{1}{x^{1+\theta}}, & x > 1, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarin $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de aannemelijkheidsfunctie (likelihood function).
 - (b) Geef de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}$ voor θ op basis van de waarnemingen $X_1, \dots, X_n$.
5. Een Bayesiaanse statisticus wil bepalen of een munt zuiver is. Hij is dus geïnteresseerd in de kans op p “kop”. Om p te schatten gooit de statisticus 1000 keer met de munt. Zij X het aantal malen “kop” dat hij krijgt.
- (a) Wat is de verdeling van X , geven dat p de kans op “kop” is?
- Onze statisticus gebruikt de Bayesiaanse methode om p te schatten. Van te voren heeft hij al een vermoeden over p , en hij neemt als a-priori verdeling voor p een Beta-verdeling met parameters $a = 1$ en $b = 2$.
- (b) Stel, het experiment levert de waarneming $X = 481$. Wat is dan de a-posteriori verdeling van the parameter p ?
 - (c) Wat is de Bayes schatter voor p (bij kwadratisch verlies)?

Normering:

1(a):	3	2(a):	3	3(a):	3	4(a):	3	5(a):	3
1(b):	3	2(b):	3	3(b):	3	4(b):	3	5(b):	3
1(c):	3							5(c):	3

Eindcijfer = (totaal+4)/4