
Tentamen Kansrekening en Statistiek
23 augustus 2002, 13.30–16.30
Divisie Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mogen tijdens het tentamen geraadpleegd worden. Het gebruik van zakrekenmachines is toegestaan.

1. Een vijver bevat n vissen, n is onbekend. Het aantal n is zo groot dat men onmogelijk alle vissen kan vangen om het te weten te komen. Men vangt daarom 100 vissen, voorziet ze van een merkteken en gooit ze terug. Enige tijd later vangt men weer 100 vissen (zonder ze tussendoor terug te gooien) en kijkt hoeveel er gemerkt zijn.
 - (a) Het vangen van de 100 vissen (de tweede keer) en tellen hoeveel er gemerkt zijn, kunnen we opvatten als een kansexperiment. Stel een kansruimte op voor dit experiment.
 - (b) Geef een uitdrukking voor de kans dat er precies 20 gemerkt zijn.
2. Zij X een continu verdeelde stochastische grootte met kansdichtheid f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (-1, 2), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $c > 0$ een nog nader te bepalen constante is.

- (a) Bepaal c zodanig dat f een kansdichtheid is.
 - (b) Bereken de verwachting $\mathbb{E}X$, het tweede moment $\mathbb{E}X^2$ en de variantie $\text{Var}X$ van X .
3. Zij (X, Y) een continu verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid $f_{(X,Y)}$, gegeven door

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 6xy^2, & x \in (0, 1), y \in (0, 1), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de marginale kansdichtheden f_X van X en f_Y van Y .
 - (b) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht het antwoord toe.
4. Zij X Binomiaal verdeeld met parameters n en p .
 - (a) Het is bekend dat we X kunnen schrijven als $X = X_1 + \dots + X_n$, waarbij $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijke, gelijkverdeelde stochastische grootheden zijn. Geef de verdeling van de X_i 's en hun verwachting $\mu = \mathbb{E}X_i$ en variantie $\sigma^2 = \text{Var}X_i$.
 - (b) Stel nu dat $n = 100$ en $p = 0.1$. Geef met behulp van de Centrale Limietstelling een benadering voor de kans $\mathbb{P}(X > 12)$. Licht het antwoord toe.

5. Laat $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke, gelijkverdeelde, continue stochastische grootheden zijn met kansdichtheid f_θ , gegeven door

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta(\theta+1)} x^{\theta-1} (1-x), & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de aannemelijkheidsfunctie (likelihood function).
 - (b) Geef de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) $\hat{\theta}_n$ voor de parameter θ op basis van de waarnemingen $X_1, \dots, X_n$.
6. Een Bayesiaanse statisticus observeert n onafhankelijke, $N(\theta, 4)$ -verdeelde stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots, X_n$, waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is. De statisticus gelooft dat de parameter θ in de buurt van 3 moet liggen en neemt als a-priori verdeling voor θ een $N(3, 1)$ -verdeling.
- (a) Wat is de a-posteriori verdeling van θ , gegeven de waarnemingen $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$?
 - (b) Geef de Bayes schatter $\hat{\theta}_n$ voor de parameter θ op basis van de waarnemingen $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$.

Normering:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1(a): & 7.5 & 2(a): & 7.5 & 3(a): & 7.5 & 4(a): & 7.5 & 5(a): & 7.5 & 6(a): & 7.5 \\ (b): & 7.5 & (b): & 7.5 & (b): & 7.5 & (b): & 7.5 & (b): & 7.5 & (b): & 7.5 \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = (\text{aantal punten} + 10) / 10$$