



Tentamen Kansrekening en Statistiek
7 juni 2002, 9.30–12.30
Divisie Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mag tijdens het tentamen geraadpleegd worden. Het gebruik van zakrekenmachines is toegestaan.

1. Uit een goed geschud spel van 52 kaarten trekt men achtereenvolgens twee kaarten.
 - (a) Stel een kansruimte op voor dit experiment.
 - (b) Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een hartenkaart is, en de tweede kaart een heer?
 - (c) Zijn de gebeurtenissen “eerste kaart is harten” en “tweede kaart is heer” onafhankelijk? Licht het antwoord toe.

2. Zij X een continu verdeelde stochastische grootte met kansdichtheid f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} c(x^3 + 1), & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $c > 0$ een nog nader te bepalen constante is.

- (a) Bepaal c zodanig dat f een kansdichtheid is.
 - (b) Bereken de verwachting $\mathbb{E}X$, het tweede moment $\mathbb{E}X^2$ en de variantie $\text{Var}X$ van X .
3. Zij (X, Y) een continu verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid $f_{(X,Y)}$, gegeven door

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & x \in (0, 1), y \in (0, \infty), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de marginale kansdichtheden f_X van X en f_Y van Y .
 - (b) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht het antwoord toe.
4. Laat $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ onafhankelijke, gelijkverdeelde stochastische grootheden zijn, met verwachting 2 en variantie 25. Geef met behulp van de Centrale Limietstelling een benadering voor de kans

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i > 3\right).$$

Licht het antwoord toe.

Z.O.Z.

5. Laat $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke, gelijkverdeelde, continue stochastische grootheden zijn met kansdichtheid f_θ , gegeven door

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de aannemelijkheidsfunctie (likelihood function).
 - (b) Geef de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) $\hat{\theta}_n$ voor de parameter θ op basis van de waarnemingen $X_1, \dots, X_n$.
6. Een bureau dat opiniepeilingen doet voor de verkiezingen is geïnteresseerd in de fractie p van Nederlanders die op een progressieve politieke partij stemt. Men kiest aselekt 1000 Nederlanders en vraagt ze of ze op een progressieve partij stemmen. Zij X het aantal ondervraagden dat op een progressieve partij stemt.
- (a) Welke verdeling heeft de stochastische grootte X , gegeven de waarde van de onbekende parameter p ?

Om de fractie p te schatten gebruikt men de Bayesiaanse methode. Op basis van historische gegevens neemt men als a-priori verdeling voor p een Beta-verdeling met parameters $a = 3$ en $b = 2$.

- (b) Stel dat X de waarde x aanneemt. Wat is dan de a-posteriori verdeling van p ?
- (c) Het blijkt dat 340 van de 1000 ondervraagden op een progressieve partij stemmen. Wat is nu de Bayes schatter $\hat{p}$ voor p ?

Normering:

1(a): 5	2(a): 5	3(a): 10	4: 15	5(a): 5	6(a): 5
(b): 5	(b): 10	(b): 5		(b): 10	(b): 5
(c): 5					(c): 5

$$\text{Eindcijfer} = (\text{aantal punten} + 10)/10$$