

Tentamen Kansrekening en Statistiek

7 juni 2000, 9:30 - 12:30

Divisie Wiskunde en Informatica
Faculteit der Exacte Wetenschappen

1. Stel een stuk software bestaat uit 100 regels, die elk of goed of fout zijn ingevoerd. Veronderstel dat van die 100 regels er 5 fout zijn. Ter controle worden 5 regels geselecteerd en bekeken. Wat is de kans dat er 2 foutieve regels worden aangetroffen als

- a) zonder teruglegging regels worden geselecteerd?
- b) met teruglegging regels worden geselecteerd?

2. Veronderstel nu dat het aantal regels in een stuk software erg groot is en dat de fractie fout ingevoerde regels p is. Noem X het aantal regels met een fout in een trekking van n regels met teruglegging. X heeft dan een binomiale verdeling met parameters n en p

- a) Geef een normale benadering zonder en met continuïteitscorrectie voor de kans $P(X \leq 3)$ als $n = 10$ en $p = 0.1$.

Laat de parameter p in de binomiale verdeling nu onbekend zijn, $n = 10$, en veronderstel dat $X = 3$ wordt waargenomen.

- b) Wat is de meest-aannemelijke schatting voor p op basis van deze waarneming?

3. Stel X heeft kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} c(x^2 + x^3) & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{als } x < 0 \text{ of } x > 2. \end{cases}$$

- a) Bepaal c zodat f een kansdichtheid is.
- b) Geef de verwachting en variantie van X .
- c) Wat is de verdelingsfunctie van $Y = X^2$?

4. De stochastische grootheden X en Y hebben simultane kansdichtheid

$$h(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{als } y \geq 0 \text{ en } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- Schets de waarden die het paar (X, Y) kan aannemen.
 - Bepaal de marginale kansdichtheden $f_1(x)$ en $f_2(y)$ van X en Y .
 - Laat zien dat X en Y afhankelijk zijn.
5. Stel dat X_1, X_2, X_3 en X_4 onafhankelijk en binomiaal verdeeld zijn met parameters 10 en p , en dat p een beta(a, b) a-priori verdeling heeft. Dat wil zeggen

$$g_P(p) = c_{a,b} p^{a-1} (1-p)^{b-1}, \quad \text{als } 0 \leq p \leq 1$$

met $c_{a,b}$ een schalingsconstante.

- Bepaal de a-posteriori verdeling van p als $X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 2$ en $X_4 = 1$ wordt waargenomen.
- Wat is de Bayes schatting voor p op basis van kwadratisch verlies als $a = b = 1$ en wat als $a = b = 10$?
- Verklaar het verschil tussen de twee schattingen uit b). (Hint : De variantie van een beta(a, b) verdeling is $\frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)} - (\frac{a}{a+b})^2$.)

Normering :

1	a)	5	3	a)	8	5	a)	8
	b)	5		b)	10		b)	5
2	a)	10		c)	8		c)	5
	b)	8	4	a)	3			
				b)	10			
				c)	5			

Het cijfer wordt als volgt berekend : $\frac{10 + \text{aantal punten}}{10}$

Het collegedictaat en ander studiemateriaal mogen tijdens het tentamen worden geraadpleegd. Het gebruik van zakrekenmachines is toegestaan. Motiveer uw antwoorden en schrijf antwoorden, daar waar dit van toepassing is, als een enkele breuk of decimaal getal.