

Tentamen Kansrekening en Statistiek

11 augustus 1999, 9:30 – 12:30

Divisie Wiskunde en Informatica, *vrije* Universiteit

1. Uit een vaas met 12 rode en 4 blauwe ballen, worden zonder teruglegging aselekt twee ballen getrokken.
- a) Bereken de kans dat de tweede bal rood is gegeven dat de eerste blauw is.
 - b) Bereken de kans dat de eerste bal rood is gegeven dat de tweede blauw is.
2. Zij X een stochastische variabele met dichtheid f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} cx(3-x) & x \in (0, 3) \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal c zodanig dat f een kansdichtheid is.
 - b) Bereken de verwachting en de variantie van X .
3. De simultane dichtheid van de stochastische grootheden X en Y wordt gegeven door

$$h(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y} & \text{als } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \infty \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal de marginale dichtheid f_1 van X en de marginale dichtheid f_2 van Y .
 - b) Zijn X en Y stochastisch onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
4. De stochastische variabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en hebben allemaal een normale verdeling met parameters μ (onbekend) en $\sigma = 1$. De stochastische variabelen $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ zijn ook onderling onafhankelijk, en hebben allemaal een standaard normale verdeling. Bovendien zijn alle X 'en en Y 'en onafhankelijk van elkaar. We definiëren de stochastische variabelen $Z_i = X_i + Y_i$.
- a) Laat zien dat zowel $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ als $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ zuivere schatters voor μ zijn.
 - b) Bereken de varianties van de beide onder a) genoemde zuivere schatters.
5. Gegeven is een data set $x_1, x_2, \dots, x_n$. Deze wordt opgevat als realisatie van onderling onafhankelijke stochastische variabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$, allemaal met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} \quad \text{voor } x > 0$$

en 0 elders. De positieve parameter θ is onbekend. (Voor de liefhebber ter informatie: deze dichtheden worden Pareto dichtheden genoemd)

- a) Leid de maximum likelihood (of meest aannemelijke) schatting $\hat{\theta}$ voor de onbekende parameter θ af.
- b) Bepaal de kansdichtheid van de stochastische variabele $Y = \log(1 + X_1)$.

6. Het volgende experiment wordt uitgevoerd. Men verricht net zo lang onafhankelijke proeven totdat het *tweede* (!!) succes optreedt. Bij iedere proef is de kans op succes θ , een onbekende parameter. Zij X het aantal proeven tot en met het tweede succes.

a) Laat zien dat de kansfunctie voor X wordt gegeven door

$$p(x|\theta) = P_\theta(X = x) = (x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2} \text{ voor } x = 2, 3, \dots$$

[Hint: beredeneer deze kansfunctie eerst voor bepaalde waarden voor x , en zie de structuur]

Een Bayesiaans statisticus hanteert als aprioriverdeling van θ de betaverdeling met dichtheid $g_\Theta(\theta) = 9(1-\theta)^8$ voor $\theta \in [0, 1]$.

b) Stel dat X de waarde x aanneemt. Specificeer de aposteriori verdeling van θ uitgedrukt in x .

c) Als X de waarde 10 aanneemt, wat is dan de Bayes schatting van θ bij kwadratisch verlies?

Normering:

1	a)	5	4	a)	5
	b)	10		b)	5
2	a)	5	5	a)	10
	b)	10		b)	5
3	a)	10	6	a)	10
	b)	5		b)	5
				c)	5

Het cijfer wordt als volgt berekend: $\frac{\text{aantal punten} + 10}{100}$.

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mag tijdens het tentamen worden geraadpleegd. Het gebruik van rekenmachines is toegestaan.