

Tentamen Kansrekening en Statistiek

2 juni 1999, 9:30 – 12:30

Divisie Wiskunde en Informatica, *vrije* Universiteit

1. Uit een vaas met 7 rode en 9 blauwe ballen, worden zonder teruglegging aselekt twee ballen getrokken.
 - a) Bereken de kans dat de tweede bal rood is gegeven dat de eerste blauw is.
 - b) Bereken de kans dat de eerste bal rood is gegeven dat de tweede blauw is.

2. Zij X een stochastische variabele met dichtheid f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(4-x) & x \in (0, 4) \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal c zodanig dat f een kansdichtheid is.
 - b) Bepaal de kansdichtheid van de stochastische variabele $Y = X/4$. [Als u onderdeel a) niet heeft kunnen maken, mag in het antwoord de constante c voorkomen]
3. De simultane dichtheid van de stochastische grootheden X en Y wordt gegeven door

$$h(x, y) = \begin{cases} 12(x-2y) & \text{als } 0 \leq 2y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal de marginale dichtheid f_1 van X en de marginale dichtheid f_2 van Y .
 - b) Zijn X en Y stochastisch onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
4. Een weeginstrument heeft de volgende eigenschap. De af te lezen waarde is het *ware* gewicht met daarbij opgeteld een fout. Die fout modelleren we als stochastische variabele met een dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{als } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x) & \text{als } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Om een nauwkeurige schatting voor het ware gewicht van een product te krijgen, doet men n onafhankelijke metingen, en neemt men het gemiddelde van deze metingen als schatting voor het gewicht. De meetfouten vatten we op als realisatie van de onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ met dichtheid f .

- a) In dit onderdeel geldt $n = 25$. Benader de kans dat de schatter meer dan 0.1 afwijkt van het ware gewicht, dus $P(|\bar{X}_{25}| > 0.1)$, met behulp van de centrale limietstelling.
 - b) Bepaal de minimale waarde voor n waarvoor geldt dat $P(|\bar{X}_n| > 0.1) < 0.05$. Gebruik hiertoe weer de benadering op basis van de centrale limietstelling.

5. Gegeven is een data set $x_1, x_2, \dots, x_n$. Deze wordt opgevat als realisatie van onderling onafhankelijke stochastische variabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$, allemaal met kansfunctie

$$P(X_i = k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

De positieve parameter λ is onbekend.

- a) Leid de maximum likelihood (of meest aannemelijke) schatting $\hat{\lambda}$ voor de onbekende parameter λ af.

Iemand komt langs, en stelt de volgende schatter voor: $\tilde{\lambda} = \bar{X}_n$.

- b) Is de schatter $\tilde{\lambda}$ zuiver voor λ ?

6. Een stochastische variabele X heeft een verdeling met kansdichtheid

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x e^{-\theta x} & \text{voor } x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

en een onbekende parameter $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. De kennis die voorafgaand aan het experiment omtrent θ aanwezig is wordt weergegeven met behulp van een apriori dichtheid over de parameterruimte Θ :

$$g_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} e^{-\theta} & \text{voor } \theta > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Een experiment wordt uitgevoerd waarbij x als realisatie van X optreedt. Verder is gegeven dat voor iedere $k \in \mathbb{N}$ en $\beta > 0$

$$\int_0^{\infty} u^k e^{-\beta u} du = \frac{k!}{\beta^{k+1}}. \quad (*)$$

- a) Laat (met behulp van (*)) zien dat de aposteriori dichtheid $g_{\Theta}(\theta|x)$ voor θ wordt gegeven door

$$g_{\Theta}(\theta|x) = \begin{cases} (x+1)^2 \theta e^{-\theta(x+1)} & \text{voor } \theta > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- b) Als X de waarde 2.09 aanneemt, wat is dan de Bayes schatting van θ bij kwadratisch verlies? Ook nu kan (*) van pas komen.

Normering:

1	a)	5	4	a)	10
	b)	10		b)	5
2	a)	5	5	a)	10
	b)	10		b)	5
3	a)	10	6	a)	10
	b)	5		b)	5

Het cijfer wordt als volgt berekend: $\frac{\text{aantal punten} + 10}{100}$.

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mag tijdens het tentamen worden geraadpleegd. Het gebruik van zakrekenmachines is toegestaan.