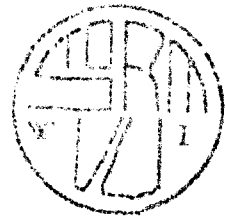


Tentamen Kansrekening en Statistiek

3 juni 1998, 9:30 – 12:30

Faculteit Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit



1. Uit een vaas met 12 rode en 7 blauwe ballen, worden aselekt vijf ballen getrokken. Bereken de kans dat er van die vijf precies 3 blauw en 2 rood zijn

- a) als de trekking *zonder* teruglegging geschiedt
- b) als de trekking *met* teruglegging geschiedt

2. Zij X een stochastische variabele met dichtheid f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal c zodanig dat f een kansdichtheid is.
- b) Bepaal de verwachting en de variantie van X .

3. De simultane dichtheid van de stochastische grootheden X en Y wordt gegeven door

$$h(x, y) = \begin{cases} 6x^2y & \text{als } x \in [0, 1] \text{ en } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal de marginale dichtheid f_1 van X en de marginale dichtheid f_2 van Y .
- b) Zijn de stochastische variabelen X en Y onderling onafhankelijk? Licht het antwoord toe.

4. De stochastische variabele X heeft een exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 1$, en de stochastische variabele Y heeft een standaard normale verdeling. Bovendien zijn X en Y onafhankelijk. Definieer de stochastische variabele $Z = X - Y$.

- a) Geef de verwachting van Z .
- b) Geef de variantie van Z .

5. In een testlaboratorium is een experiment uitgevoerd om de kwaliteit van een bepaald type lamp te bepalen. Tien lampen werden aangesloten en er werd gewacht op het moment dat de laatste het opgaf. De levensduur (in dagen) van lamp i wordt gemodelleerd als een stochastische variabele X_i , en er wordt verondersteld dat alle X_i 's (dus voor $i = 1, \dots, 10$) dezelfde exponentiële verdeling met parameter λ hebben. De parameter is echter niet bekend. Die moet geschat worden.

De volgende levensduren werden waargenomen:

453.4 297.3 874.4 440.5 1697.5 305.5 1046.8 1656.8 49.2 417.7

- a) Geef de maximum likelihood (of meest aannemelijke) schatting $\hat{\lambda}$ voor de onbekende parameter λ .

- b) Geef, gebaseerd op het antwoord bij a), een schatting voor de verwachte levensduur van een gloeilamp van het onderzochte type. Als u a) niet kon beantwoorden, mag het antwoord in termen van $\hat{\lambda}$ worden gegeven.
6. Het volgende experiment wordt uitgevoerd. Men verricht net zo lang onafhankelijke proeven totdat het eerste succes optreedt. Bij iedere proef is de kans op succes θ , een onbekende parameter. Zij X het aantal proeven tot en met het eerste succes.
- a) Geef de kansfunctie $p(x|\theta)$ van X bij succeskans θ . Zoals jullie allemaal weten is deze kansfunctie gedefinieerd door
- $$p(x|\theta) = P_\theta(X = x)$$
- voor alle mogelijke waarden x die X kan aannemen.
- Een Bayesiaans statisticus hanteert als aprioriverdeling van θ de betaverdeling met dichtheid $g_\theta(\theta) = 9(1 - \theta)^8$ voor $\theta \in [0, 1]$.
- b) Stel dat X de waarde x aanneemt. Specificeer de aposteriori verdeling van θ uitgedrukt in x .
- c) Als X de waarde 28 aanneemt, wat is dan de Bayes schatting van θ bij kwadratisch verlies?

Normering:

1	a)	5	4	a)	5
	b)	5		b)	5
2	a)	5	5	a)	10
	b)	10		b)	5
3	a)	10	6	a)	10
	b)	5		b)	10
				c)	5



Het cijfer wordt als volgt berekend: $\frac{\text{aantal punten} + 10}{100}$.

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mag tijdens het tentamen worden geraadpleegd. Het gebruik van zakrekenmachines is toegestaan.