



Tentamen Kansrekening en Statistiek

12 augustus, 13:30 – 16:30

Faculteit Wiskunde en Informatica, *vrije* Universiteit

1. Uit een vaas met 5 rode en 10 blauwe ballen, worden zonder teruglegging aselekt twee ballen getrokken.
 - a) Bereken de kans dat de tweede bal rood is gegeven dat de eerste blauw is.
 - b) Bereken de kans dat de eerste bal rood is gegeven dat de tweede blauw is.
2. Zij X een stochastische variabele met dichtheid f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-4} & x \in (1, \infty) \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal c zodanig dat f een kansdichtheid is.
 - b) Bepaal de verwachting en de variantie van X .
3. De simultane dichtheid van de stochastische grootheden X en Y wordt gegeven door

$$h(x, y) = \begin{cases} 6(x - y) & \text{als } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bepaal de marginale dichtheid f_1 van X en de marginale dichtheid f_2 van Y .
 - b) Ga na of X en Y stochastisch onafhankelijk zijn.
4. In de liften binnen onze faculteit is te lezen: 'maximaal 630 kg, 8 personen'. Er nemen 8 personen plaats in de lift. De gewichten van deze personen worden gemodelleerd als acht onderling onafhankelijke stochastische variabelen, allemaal met normale verdeling met $\mu = 75$ en $\sigma^2 = 100$.
 - a) Bepaal de kans dat het totale gewicht van de acht 'lifters' boven de 630 kg uitkomt
 - b) Bepaal voor welke maximale belasting g [in onderdeel a) gelijk aan 630] de kans op overschrijding hiervan (als er acht mensen in de lift plaatsnemen) gelijk is aan 0.05.
 5. Het aantal fietsen dat door een handelaar op een zaterdag wordt verkocht is Poisson verdeeld met onbekende parameter $\lambda > 0$. Op de laatste 5 zaterdagen verkocht de handelaar respectievelijk:

4 5 1 2 5

fietsen.

- a) Geef op basis van deze data de maximum likelihood (of meest aannemelijke) schatting $\hat{\lambda}$ voor de onbekende parameter λ .

Een zeer droevige gebeurtenis in het leven van een fietsverkoper is het optreden van een zaterdag waarop geen enkele fiets wordt verkocht.

- b) Geef, gebaseerd op het antwoord bij a), een schatting voor de kans dat er op een willekeurige zaterdag geen enkele fiets wordt verkocht door onze handelaar. Als u a) niet kon beantwoorden, mag het antwoord in termen van $\hat{\lambda}$ worden gegeven.

6. Een stochastische variabele X heeft een verdeling met kansdichtheid

$$f(x|\theta) = \theta x e^{-\theta x} \quad \text{voor } x > 0$$

en een onbekende parameter $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. De kennis die voorafgaand aan het experiment omtrent θ aanwezig is wordt weergegeven met behulp van een apriori dichtheid over de parameterruimte Θ :

$$g_{\Theta}(\theta) = e^{-\theta} \quad \text{voor } \theta > 0$$

Een experiment wordt uitgevoerd waarbij x als realisatie van X optreedt. Verder is gegeven dat voor iedere $k \in \mathbb{N}$ en $\beta > 0$

$$\int_0^{\infty} u^k e^{-\beta u} du = \frac{k!}{\beta^{k+1}}.$$

- a) Bepaal de aposteriori dichtheid $g_{\Theta}(\theta|x)$ voor θ .
 b) Als X de waarde 2.11 aanneemt, wat is dan de Bayes schatting van θ bij kwadratisch verlies?

Normering:

1	a)	5	4	a)	5
	b)	10		b)	5
2	a)	5	5	a)	10
	b)	10		b)	5
3	a)	10	6	a)	10
	b)	5		b)	10

Het cijfer wordt als volgt berekend: $\frac{\text{aantal punten} + 10}{100}$.

Opmerking: Het collegedictaat en ander studiemateriaal mag tijdens het tentamen worden geraadpleegd. Het gebruik van zakrekenmachines is toegestaan.