

Tentamen Kansrekening 2

1 juli 2014, 12.00-14.45

- Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven en een bijlage. Er zijn 45 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(5 + \text{aantal punten})/5$.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{ce^3}{x^4} & \text{als } x > e, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

hierbij is c een nog te berekenen constante.

- (a) [2 punten] Bereken c .
- (b) [3 punten] Bereken $\text{Var}(X)$.
- (c) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y := \ln(X)$, vergeet niet daarbij duidelijk aan te geven voor welke waarden deze dichtheidsfunctie gelijk aan nul is.

2. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{als } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .
- (b) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y := |X|$.

3. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x-y}{2}} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 3x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter 1.
- (b) [3 punten] Laat zien dat $E(Y|X = x) = 3x + 2$ (als $x \geq 0$).
- (c) [3 punten] Bereken $E(Y)$ met behulp van de onderdelen (a) en (b).
- (d) [3 punten] Bereken $P(Y < 4 - X)$.

4. Laat X en Y onafhankelijke continue stochasten zijn, waarbij X exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda > 0$, Y exponentieel verdeeld is met parameter $\mu > 0$ en $\lambda \neq \mu$.

(a) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie $f_Z(z)$ van de stochast $Z := X + Y$.

(b) [3 punten] In dit onderdeel mag je gebruiken dat de momentgenererende functie van een exponentieel verdeelde stochast met parameter $\lambda > 0$ gegeven wordt door $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, met als domein $t < \lambda$.

Bereken de momentgenererende functie van de stochast $W := 2X - Y$, geef daarbij duidelijk aan wat het domein van deze momentvoortbrengende functie is.

5. [4 punten] Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{als } 0 < y < 1 \text{ en } 0 < x < y, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken $\text{Cov}(X, Y)$.

6. [3 punten] Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie f_X en neem aan dat voor $x < 0$ geldt dat $f_X(x) = 0$ (dat wil zeggen dat X een positieve continue stochast is).

Bewijs dat

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > x) dx.$$

Hint: Schrijf $P(X > x)$ als integraal en verwissel vervolgens de integratievolgorde.

7. In deze opgave mag je gebruiken dat de variantie van een uniform verdeelde stochast op het interval $[a, b]$ gelijk is aan $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Laat $X_1, X_2, \dots, X_{225}$ onafhankelijke uniform verdeelde stochasten zijn op het interval $[2, 4]$.

(a) [3 punten] Geef met behulp van de centrale limietstelling een benadering van de kans dat

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{225}}{225} < 2,95\right).$$

(b) [3 punten] Laat Y het aantal van de stochasten $X_1, X_2, \dots, X_{225}$ zijn dat groter is dan 3,5. Geef met behulp van de centrale limietstelling een benadering van $P(Y > 50)$.

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]