

Tweede deeltentamen Kansrekening II voor W

23 mei 2011, 12.00-14.00

- Dit tentamen bestaat uit zes opgaven. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & \text{als } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter 2λ .
- (b) [4 punten] Laat zien dat $E(Y|X = x) = x + \frac{1}{\lambda}$ (voor $x > 0$).
- (c) [4 punten] Gebruik de vorige twee onderdelen om $E(Y)$ te berekenen.

2. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheid

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{5}xy & \text{als } x, y > 0 \text{ en tevens } 1 < x + y < 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [4 punten] Bereken $P(Y > X + 1)$. *Aanwijzing: Schets eerst het gebied in het xy -vlak waar geldt dat $f_{(X,Y)}(x, y) > 0$.*
- (b) [3 punten] Bereken de dichtheid van de stochast $Z := X + Y$.

3. [4 punten] Laat X_1 en X_2 onafhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten zijn. Laat zien dat de stochasten Y_1 en Y_2 gedefinieerd door

$$Y_1 := \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \text{ en } Y_2 := \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$$

ook onafhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten zijn.

4. [4 punten] Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke uniform verdeelde stochasten op het interval $[0, 1]$ zijn. Definieer Y_n als het maximum van de stochasten $X_1, X_2, \dots, X_n$. Laat zien dat Y_n in verdeling naar een stochast convergeert die met kans 1 de waarde 1 aanneemt.

5. Een boekhouder wil zijn boekhouding vereenvoudigen door alle bedragen af te ronden op hele euro's (en wel naar het dichtstbijzijnde gehele getal). De boekhouder is geïnteresseerd in de som van de eerste 100 afrondingsfouten. We maken het volgende model: de afrondingsfouten noteren we met $X_1, X_2, \dots, X_{100}$, waarbij de X_i 's onafhankelijke en uniform verdeelde stochasten zijn op het interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(a) [3 punten] Laat zien dat $\text{Var}(X_1) = \frac{1}{12}$.

(b) [4 punten] Gebruik de Centrale limietstelling om te laten zien dat

$$P(|X_1 + X_2 + \dots + X_{100}| > 10)$$

ongeveer gelijk is aan $2P(Z > \sqrt{12})$, waarbij Z een standaard normaal verdeelde stochast is.

6. [3 punten] Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn waarvoor geldt dat X en Y dezelfde marginale verdeling hebben en eindige verwachting en variantie. Laat zien dat

$$\text{Cov}(X + Y, X - Y) = 0.$$