

Tentamen Kansrekening II voor Wiskunde

20 augustus 2009, 8.45-11:30

- Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven en een bijlage. Er zijn 45 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(5 + \text{aantal punten})/5$.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. In deze opgave mag je zonder verdere berekening gebruiken dat de verwachting van een geometrisch verdeelde stochast met parameter p gelijk is aan $\frac{1}{p}$.

Laat (X, Y) een discrete stochastische vector zijn met gezamenlijke kansmassafunctie

$$p_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } x = 1 \text{ en } y = 1, \\ \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{y-1} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{als } x \in \{2, 3, \dots\} \text{ en } y \in \{1, 2, \dots\}. \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Laat zien dat X geometrisch verdeeld is met parameter $\frac{1}{2}$.
- (b) [3 punten] Laat zien dat voor alle relevante waarden van x geldt dat $E(Y|X = x) = x$.
- (c) [3 punten] Bereken de verwachting van Y .

2. Laat X een stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{als } x \in [-1, 0), \\ 1 - x & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .
- (b) [3 punten] Bereken de variantie van X .
- (c) [4 punten] Bereken de dichtheid van de stochast $Y = |X|$.

3. Laat X_1 en X_2 onafhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten zijn. We definiëren de continue stochastische vector (Y_1, Y_2) door $(Y_1, Y_2) := (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

(a) [4 punten] Laat zien dat de gezamenlijke dichtheid van (Y_1, Y_2) gegeven wordt door

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(y_1^2 + y_2^2)}{4}}, \text{ voor alle } y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) [3 punten] Laat zien dat Y_1 en Y_2 onafhankelijke normaal verdeelde stochasten zijn met verwachting 0 en variantie 2.

(c) [3 punten] Bij dit onderdeel heb je de bijlage nodig. Benader $P(Y_1 \geq -\sqrt{2})$.

4. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X, Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{als } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [3 punten] Laat zien dat X uniform verdeeld is op het interval $(0, 1)$.

(b) [3 punten] Bereken de marginale dichtheid van Y .

(c) [3 punten] Bereken $E(Y|X = x)$ voor $x \in (0, 1)$.

(d) [3 punten] Bereken $P(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2})$.

5. [4 punten] Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke identiek verdeelde stochasten zijn met $E(X_i) = 1$ en $\text{Var}(X_i) = 4$. Gebruik de centrale limietstelling en de bijlage om te berekenen hoe groot we n ongeveer moeten kiezen om te zorgen dat

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - 1\right| \geq \frac{1}{100}\right) \approx 0,10.$$

Voor W



Normal Random Variables

203

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

[illegible]

