

Tweede deeltentamen Kansrekening II voor W

28 mei 2009, 8.45-10:45

- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-2x+y} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } -\infty < y \leq x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter 1.
- (b) [3 punten] Bereken de marginale dichtheid van Y .
- (c) [2 punten] Zijn X en Y onafhankelijk? Licht je antwoord toe.
- (d) [4 punten] Bereken $E(Y|X = x)$ voor $x \geq 0$.
- (e) [4 punten] Bereken de gezamenlijke dichtheid $f_{(U,V)}$ van de stochastische vector (U, V) die gedefinieerd wordt door $U = X$ en $V = X - Y$. Geef daarbij duidelijk aan voor welke (u, v) geldt dat $f_{(U,V)}(u, v) > 0$.

2. Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [4 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Z := X + Y$. Het is handig om bij het berekenen van $f_Z(z)$ onderscheid te maken tussen de situaties $z < 0$, $0 \leq z \leq 1$ en $z > 1$.
- (b) [4 punten] Bereken $P(X < Y)$.

3. [4 punten] Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten met parameter $\lambda > 0$ zijn. Voor $n = 1, 2, \dots$ definiëren we Y_n als het minimum van de stochasten $X_1, X_2, \dots, X_n$. Laat zien dat Y_n in verdeling naar een stochast convergeert die met kans 1 de waarde 0 aanneemt. Realiseer je dat voor $y \in \mathbf{R}$, $P(Y_n > y)$ makkelijk uit te rekenen is.

4. Laat $X_1, X_2, \dots, X_{400}$ onafhankelijke stochasten zijn met dichtheidsfuncties

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{als } x > 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [4 punten] Laat zien dat $E(X_i) = \frac{3}{2}$ en $\text{Var}(X_i) = \frac{3}{4}$.

(b) [4 punten] Bij dit onderdeel heb je de bijlage nodig. Gebruik een benadering gebaseerd op de centrale limietstelling om te berekenen voor welk getal c geldt dat

$$P(600 - c \leq X_1 + \dots + X_{400} < 600 + c) \approx 0.90.$$

203

[illegible]

