

Tweede deeltentamen Kansrekening II voor W

28 mei 2008, 8.45-10:45

- Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2x^2 e^{-xy} & \text{als } x \in [0, 1] \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [2 punten] Laat zien dat de marginale dichtheidsfunctie van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(b) [2 punten] Zijn X en Y onafhankelijk? Licht je antwoord toe!

(c) [3 punten] Laat zien dat voor $x \in [0, 1]$ geldt dat $E(Y|X = x) = \frac{1}{x}$.

(d) [3 punten] Bereken de verwachting van Y .

2. Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{als } y \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [4 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Z := X + Y$. Het is handig om bij het berekenen van $f_Z(z)$ onderscheid te maken tussen de situaties $z < 0$, $0 \leq z \leq 1$, $1 < z \leq 2$ en $z > 2$.

(b) [4 punten] Bereken $P(Y \leq X + \frac{1}{2})$.

(c) [3 punten] Bereken de variantie van de stochast $W := 2X + Y$.

3. [5 punten] Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheid

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de gezamenlijke dichtheidsfunctie van de continue stochastische vector $(U, V) := (X + Y, e^X)$ en maak een schets van het gebied in het uv -vlak waar geldt dat $f_{(U,V)}(u,v) > 0$.

4. [5 punten] Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke uniform verdeelde stochasten op het interval $[0,1]$ zijn. Voor $n = 1, 2, \dots$ definiëren we Y_n als het minimum van de stochasten $X_1, X_2, \dots, X_n$. Laat zien dat nY_n in verdeling naar een exponentiële stochast met parameter 1 convergeert als $n \rightarrow \infty$. Realiseer je daarbij dat voor $y \in \mathbf{R}$, $P(Y_n > y)$ makkelijk uit te rekenen is.

5. [5 punten] Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten zijn met parameter 2. Gebruik de centrale limietstelling om te berekenen hoe groot we n ongeveer moeten kiezen om te zorgen dat

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100}\right) \approx 0,01.$$

