

Tentamen Kansrekening II

(w-eda)



24 augustus 2004, 13.30-16.30

1. We gooien herhaaldelijk met een zuivere munt. Laat X het aantal malen 'kop' zijn voordat we voor het eerst 'munt' zien. Laat Y het aantal malen 'kop' zijn tussen de eerste twee maal dat we 'munt' zien.

- (a) (5 punten) Bepaal de gezamenlijke kansmassafunctie van X en Y .
- (b) (5 punten) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.
- (c) (10 punten) Bepaal $P(X = n | X + Y = m)$ voor alle relevante waarden van n en m .

2. De stochastische grootte X neemt waarden $1/2$ en $1/3$ aan, allebei met kans $1/2$. Als gegeven is dat $X = k$, dan is Y geometrisch verdeeld met parameter k .

- (a) (5 punten) Bepaal $E(Y | X = k)$ voor $k = 1/2$ en $k = 1/3$.
- (b) (5 punten) Bepaal $P(Y = n)$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$
- (c) (5 punten) Bepaal $E(Y)$.
- (d) (5 punten) Bepaal de gezamenlijke verdeling van X en Y .

3. Een man en een vrouw spreken af op het station. De aankomsttijd van de man noemen we X , en we nemen aan dat X uniform verdeeld is tussen 12 en 13 uur. De aankomsttijd van de vrouw noemen we Y , en we nemen aan dat Y uniform verdeeld is tussen 12 en 12.30 uur. Tenslotte nemen we aan dat X en Y onafhankelijk zijn.

- (a) (5 punten) Bepaal de gezamenlijke dichtheid van X en Y .
- (b) (5 punten) Wat is de kans dat de vrouw eerder dan de man aankomt op het station?
- (c) (10 punten) Bepaal de kans dat de eerst aangekomen persoon niet langer dan 10 minuten hoeft te wachten op de andere persoon.

4. De stochastische vector (X, Y) vatten we op als coördinaten in het vlak. De gezamenlijke dichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2}.$$

Laat de poolcoördinaten van (X, Y) gegeven zijn door (R, Θ) , d.w.z. dat $X = R \cos \Theta$, $Y = R \sin \Theta$, waarbij $R > 0$ en $0 \leq \Theta < 2\pi$.

- (a) (10 punten) Laat zien dat de gezamenlijke verdeling van R en Θ gegeven wordt door

$$h(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad r > 0,$$

en $h(r, \theta) = 0$ voor alle andere waarden van r en θ .

(b) (5 punten) Bepaal m.b.v. de uitkomst in (a) de verdeling van R .

(c) (5 punten) Bepaal $E(\Theta|R=r)$ voor alle relevante waarden van r .

5. (10 punten) Laat $X_1, \dots, X_{10}$ onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische grootheden zijn, uniform verdeeld tussen 0 en 1. Gebruik de centrale limietstelling om $P(\sum_{i=1}^{10} X_i > 6)$ te benaderen. (Je mag het antwoord uitdrukken in de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling.)

6. (5 punten) De stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots$ zijn onafhankelijk met dezelfde uniforme verdeling op $[0, r]$, waarbij $r > 0$. Het minimum van $X_1, X_2, \dots, X_n$ noemen we M_n .

(a) (5 punten) Laat zien dat $P(M_n \geq x) = (1 - \frac{x}{r})^n$, voor $x \in [0, r]$.

(b) (5 punten) Bepaal een rij getallen $a_1, a_2, \dots$ zodanig dat de rij stochastische grootheden $a_1 M_1, a_2 M_2, \dots$ in verdeling convergeert naar een stochastische grootheid met verwachting $2r$.