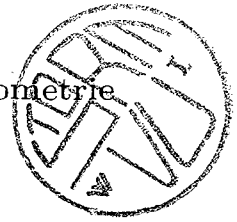


Eerste deeltentamen Kansrekening II voor wiskunde en econometrie



24 maart 2004, 10.30 -12.30

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Er zijn 40 punten te behalen, het eindcijfer wordt gegeven door (behaalde punten)/4.

1. De simultane verdeling van de discrete stochastische grootheden X en Y wordt gegeven door de volgende tabel:

	-1	0	1	X
4	$p - \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4} - p$	0	
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	
6	$p + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4} - p$	
Y				

- (2 punten) Welke waarden kan p aannemen?
- (2 punten) Bepaal de marginale verdelingen van X en Y .
- (3 punten) Zijn er waarden voor p die ervoor zorgen dat X en Y onafhankelijk zijn? Motiveer je antwoord.

2. We gooien herhaaldelijk met een munt, waarvan de kans op kop gelijk is aan p . Laat nu X het moment zijn waarop we voor het eerst kop gooien, en Y het moment waarop we voor de tweede keer kop gooien.

- (2 punten) Laat zien dat $P(Y = n | X = k) = (1 - p)^{n-k-1}p$, voor $k = 1, 2, \dots$ en $n = k + 1, k + 2, \dots$
- (3 punten) Bereken $E(Y | X = k)$ voor $k = 1, 2, \dots$
- (2 punten) Bepaal $P(Y = n)$ voor alle relevante waarden van n .
- (3 punten) Bepaal de simultane verdeling van X en Y .

3. Stel X heeft een uniforme verdeling op $(0, 1)$.

- (3 punten) Laat zien dat $Y = X^2$ een continue stochastische grootheid is met dichtheid

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

voor $0 < x < 1$, en $f(x) = 0$ elders.

- (2 punten) Bepaal de kans $P(\frac{1}{4} < Y < 1)$.
- (3 punten) Bepaal de verwachting van Y .

4. Laat X een continue stochastische grootheid zijn met dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2} & \text{als } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

waarbij α een onbekende parameter is met $|\alpha| \leq 1$.

(a) (2 punten) Laat zien dat f inderdaad een dichtheid is.

(b) (3 punten) Bereken de verdelingsfunctie van X .

(c) (2 punten) Bereken de verwachting van X .

(d) (3 punten) Bepaal de verdeling van $Y = \arcsin(X)$.

5. Laat X een normaal verdeelde stochastische grootte zijn met parameters $\mu = 7$ en $\sigma^2 = 25$.

(a) (2 punten) Bepaal de verdeling van $(X - 7)/5$.

(b) (3 punten) Druk $P(5 < X < 11)$ uit in termen van de verdelingsfunctie F van de standaard normale verdeling.