

Tentamen Kansrekening II

13 augustus 2003, 13.30-16.30

1. We gooien twee maal met een zuivere dobbelsteen. Het aantal keren dat we twee ogen gooien noemen we X , en Y is het aantal keren dat we drie ogen gooien.

(a) Noteer de gezamenlijke dichtheid van X en Y met $p(x, y)$ voor $x = 0, 1, 2$ en $y = 0, 1, 2$.

$$p(0, 0) = \frac{4}{6} \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$

$$p(1, 0) = p(0, 1) = 2 \frac{1}{6} \frac{4}{6} = \frac{8}{36}$$

$$p(2, 0) = p(0, 2) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$p(1, 1) = 2 \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$p(1, 2) = p(2, 1) = p(2, 2) = 0$$

(b) De kansmassa functie van Y wordt gegeven door:

$$p_Y(0) = \frac{16}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$$

$$p_Y(1) = \frac{8}{36} + \frac{2}{36} = \frac{10}{36}$$

$$p_Y(2) = \frac{1}{36}$$

Voor de verdeling van $Z = X + Y$ geldt dat $p_Z(z) = \sum_x p(x, z - x)$. De mogelijke waarden van Z zijn wederom 0, 1 of 2. Dan:

$$p_Z(0) = p(0, 0) = \frac{16}{36}$$

$$p_Z(1) = p(0, 1) + p(1, 0) = \frac{16}{36}$$

$$p_Z(2) = p(0, 2) + p(1, 1) + p(2, 0) = \frac{4}{36}$$

Er geldt dat $p_Z(0) + p_Z(1) + p_Z(2) = 1$.

(c) Er geldt dat $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$, dus :

$$\begin{aligned} E(X|Y=0) &= 0 \times p_{X|Y}(0|0) + 1 \times p_{X|Y}(1|0) + 2 \times p_{X|Y}(2|0) = \\ &= 1 \frac{8/36}{25/36} + 2 \frac{1/36}{25/36} = \frac{2}{5} \\ E(X|Y=1) &= 0 \times p_{X|Y}(0|1) + 1 \times p_{X|Y}(1|1) + 2 \times p_{X|Y}(2|1) = \\ &= 1 \frac{2/36}{10/36} = \frac{1}{5} \\ E(X|Y=2) &= 0 \times p_{X|Y}(0|2) + 1 \times p_{X|Y}(1|2) + 2 \times p_{X|Y}(2|2) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. De continue stochastische vector (X, Y) heeft gezamenlijke dichtheid

$$f(x, y) = y^2 e^{-y(x+1)},$$

voor $x, y \geq 0$, en $f(x, y) = 0$ elders.

(a) Voor de marginale dichtheid $f_Y(y)$ van Y geldt:

$$f_Y(y) = \int_x f(x, y) dx = \int_{x=0}^{\infty} y^2 e^{-y(x+1)} dx = y e^{-y} \int_{x=0}^{\infty} y e^{-yx} dx = e^{-y}$$

waarbij de laatste integraal de verwachting is van een stochast V die exponentieel verdeeld is met parameter y en dus gelijk is aan $\frac{1}{y}$.

(b) De dichtheid van Y is een exponentiele dichtheid met parameter 1, dus $E(Y) = 1$.

(c) Voor de dichtheid $f_{X|Y}(x|y)$ geldt:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{y^2 e^{-yx} e^{-y}}{e^{-y}} = y^2 e^{-yx}, \text{ voor } x, y \geq 0$$

Dan:

$$E(X|Y=y) = \int_x x f_{X|Y}(x|y) dx = y \int_{x=0}^{\infty} x y e^{-yx} dx = 1$$

want de laatste integraal is wederom gelijk aan de verwachting van de stochast V .

(d) X en Y zijn niet onafhankelijk, want de gezamenlijke dichtheid $f(x, y)$ is niet te schrijven als product van twee functies $g(x)$ en $h(y)$.

3. (a) De Centrale Limiet Stelling zegt dat

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightsquigarrow U, \text{ waar } U \sim N(0, 1)$$

als tenminste μ en σ^2 eindig zijn en de stochasten $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk zijn en gelijkverdeeld. We kunnen $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ omschrijven op de volgende wijze:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{S_n/n - (n\mu)/n}{\sigma} = \sqrt{n} \frac{S_n/n - \mu}{\sigma}$$

Dus laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijk, gelijkverdeelde stochasten zijn met eindige verwachting μ en variantie σ^2 , dan geldt voor het gemiddelde $X_1 + \dots + X_n/n = S_n/n$:

$$\sqrt{n} \frac{S_n/n - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow U, \text{ waar } U \sim N(0, 1)$$

(b) De verwachting bij deze dichtheid $f(y) = 3(1-y)^2, 0 \leq y \leq 1$ wordt gegeven door:

$$\int_y y f(y) dy = \int_y y \cdot 0^1 3y(1-y)^2 dy = \int_{y=0}^1 3y^3 - 6y^2 + 3y dy = \frac{1}{4}$$

en het tweede moment:

$$\int_y y^2 f(y) dy = \int_y y \cdot 0^1 3y^2(1-y)^2 dy = \int_{y=0}^1 3y^4 - 6y^3 + 3y^2 dy = \frac{1}{10}$$

zodat de variantie gelijk is aan $\frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{3}{80}$. De centrale limiet stelling uit

(a) zegt nu dat $\sqrt{15} \frac{Y - 1/4}{\sqrt{3/80}} \rightsquigarrow N(0, 1)$, dus

$$P\left(\sqrt{15} \frac{Y - 1/4}{\sqrt{3/80}} \leq u\right) = \Phi(u)$$

Daarom geldt voor $P(\frac{1}{8} \leq Y \leq \frac{3}{8})$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{8} \leq Y \leq \frac{3}{8}\right) &= P\left(Y \leq \frac{3}{8}\right) - P\left(Y \leq \frac{1}{8}\right) = \\ &= P\left(\sqrt{15} \frac{Y - 1/4}{\sqrt{3/80}} \leq \sqrt{15} \frac{3/8 - 1/4}{\sqrt{3/80}}\right) \\ &\quad - P\left(\sqrt{15} \frac{Y - 1/4}{\sqrt{3/80}} \leq \sqrt{15} \frac{1/8 - 1/4}{\sqrt{3/80}}\right) = \\ &= \Phi\left(\sqrt{15} \frac{1/8}{\sqrt{3/80}}\right) - \Phi\left(\sqrt{15} \frac{1/8}{\sqrt{3/80}}\right) = \\ &= \Phi(2.5) - \Phi(-2.5) \end{aligned}$$

4. (a) De ongelijkheid van Chebyshev zegt dat voor $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{1}{a^2} \text{Var}(X)$$

Er geldt dat $E(X) = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100$ en $\text{Var}(X) = 200 \cdot \frac{1}{2} = 50$, want X is binomiaal verdeeld met parameters 200 en $\frac{1}{2}$. Dus:

$$P(|X - E(X)| \leq 5) = 1 - P(|X - E(X)| > 5) \geq 1 - \frac{1}{5^2} 50 = -1$$

Een ondergrens voor de kans dat X minder dan 5 afwijkt van $E(X)$ is dus gelijk aan 0, omdat kansen altijd positief zijn.

(b) $P(|X - E(X)| \leq 5) = P(95 \leq X \leq 105)$. Omdat X de som is van 200 onafhankelijk, gelijkverdeelde stochasten is met verwachting $\frac{1}{2}$ en variantie $\frac{1}{4}$ geldt dat $\frac{X - 200 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{200}} \rightsquigarrow N(0, 1)$ wegens de CLS. Dus geldt:

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \leq 5) &= P\left(\frac{95 - 100}{\frac{1}{2} \sqrt{200}} \leq \frac{X - 100}{\frac{1}{2} \sqrt{200}} \leq \frac{105 - 100}{\frac{1}{2} \sqrt{200}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{105 - 100}{\frac{1}{2} \sqrt{200}}\right) - \Phi\left(\frac{95 - 100}{\frac{1}{2} \sqrt{200}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.5205 \end{aligned}$$

(c) De ongelijkheid van Chebyshev geeft in het algemeen een bovengrens voor kansen, in deze opgave een ondergrens. Maar uit onderdeel (b) bleek dat deze ondergrens helemaal niet scherp is, wat ook al volgende uit onderdeel (a) omdat kansen altijd positief zijn.

5. X en Y hebben een gezamenlijke dichtheid gegeven door $f(x, y) = 1$, voor $0 < x < 1$ en $0 < y < 1$, en $f(x, y) = 0$ elders. Definieer $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ door $g(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2) = (y_1, y_2)$. Deze functie is 1-1 en heeft als inverse functies: $x_1 = y_1$ en $x_2 = \frac{y_2}{y_1}$, want $x_1 x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_2}{x_1}$ en $x_1 = y_1$. Bij deze functies hoort de volgende Jacobiaan $J(y_1, y_2) = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = 1 \cdot \frac{1}{y_1} - 0 \cdot \frac{-y_2}{y_1^2} = \frac{1}{y_1}$

Zij $Z = XY$ dan wordt dichtheid van (X, Z) gegeven door:

$$f_{X,Z}(x, z) = f\left(x, \frac{z}{x}\right) |x|^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{voor } 0 < z < x < 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

$0 < z < x$ want er moet gelden dat $0 < \frac{z}{x} < 1$ anders is $f(x, \frac{z}{x}) = 0$.

Dus voor $z \in (0, 1)$ geldt:

$$f_Z(z) = \int_x f_{X,Z}(x, z) dx = \int_{x=z}^1 \frac{1}{x} dx = -\ln z$$

Is dit inderdaad een dichtheid?

$$\int_z f_Z(z) dz = - \int_{z=0}^1 \ln z dz \stackrel{\text{p.i.}}{=} -z \ln z \Big|_{z=0}^1 + \int_{z=0}^1 z \frac{1}{z} dz = 1$$

6. Waardeverzameling van X is $W_X = \{0, 1, 2\}$ en die van Y is $W_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. De voorwaardelijke dichtheid $p_{Y|X}(y|x)$ kan opgevat worden als de kans op $y - x$ keren kop in de eerste drie worpen. Dit geeft de volgende voorwaardelijke dichtheid $p_{Y|X}(y|x)$ voor $y \in W_Y$ en $x \in W_X$:

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{als } y - x = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, & \text{als } y - x = 1, 2 \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$