

## Eerste deeltentamen Kansrekening II

26 maart 2003

1. De discrete stochastische vector  $(X, Y)$  heeft kansmassafunctie  $p(x, y)$  gegeven door  $p(0, 0) = \frac{2}{5}$ ,  $p(0, 1) = \frac{1}{5}$ ,  $p(1, 0) = \frac{1}{10}$  en  $p(1, 1) = \frac{3}{10}$ .

(a) Bepaal de marginale kansmassafuncties van  $X$  en van  $Y$ .

(b) Bepaal  $p_{X|Y}(0|1)$  en  $p_{X|Y}(1|1)$ .

(c) Bereken  $E(X|Y = 1)$ .

(d) Bereken de verwachting van  $X + Y$ .

### Oplossing:

(a)  $P(X = 0) = p(0, 0) + p(0, 1) = 3/5$ ;  $P(X = 1) = 2/5$ ;  $P(Y = 0) = p(0, 0) + p(1, 0) = 1/2$ ;  $P(Y = 1) = 1/2$ .

(b)  $p_{X|Y}(0|1) = P(X = 0|Y = 1) = p(0, 1)/P(Y = 1) = 2/5$ ;

$p_{X|Y}(1|1) = P(X = 1|Y = 1) = p(1, 1)/P(Y = 1) = 3/5$ .

(c)  $E(X|Y = 1) = 0 \cdot p_{X|Y}(0|1) + 1 \cdot p_{X|Y}(1|1) = 3/5$ .

(d)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2/5 + 1/2 = 9/10$ .

ofwel:  $E(X + Y) = \sum_{x,y} (x + y)p(x, y) = 1/5 + 1/10 + 3/10 \cdot 2 = 9/10$ .

2. De continue stochastische vector  $(X, Y)$  heeft dichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot x(2 - x - y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal de constante  $c$ .

(b) Bepaal de marginale dichtheid van  $Y$ .

(c) Bepaal de verwachting van  $Y$ .

(d) Zijn  $X$  en  $Y$  onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

### Oplossing:

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 x(2 - x - y) dx dy &= \int_0^1 [x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y) dy = 5/12. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat  $c = 12/5$ .

(b)

$$f_Y(y) = 12/5 \int_0^1 x(2 - x - y) dx = \frac{12}{5} (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y)$$

zoals we bij (a) al hadden uitgerekend. Dus  $f_Y(y) = \frac{8}{5} - \frac{6}{5}y$ , voor  $0 < y < 1$ , en  $f_Y(y) = 0$  elders.

(c)  $E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y(\frac{8}{5} - \frac{6}{5}y) dy = 2/5$ .

(d) Nee, want  $f(x, y)$  is niet te schrijven als het product van een functie van  $x$  en een functie van  $y$ .

**3.** De stochastische grootte  $Y$  heeft een uniforme verdeling op  $(0, 5)$ . Wat is de kans dat de tweedegraadsvergelijking (in  $x$ )

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

twee (reële) nulpunten heeft? Bedenk hierbij dat je dit kunt aflezen aan de discriminant van de vergelijking.

**Oplossing:**

De discriminant is gelijk aan

$$D = (4Y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (Y + 2) = 16Y^2 - 16(Y + 2).$$

De vergelijking heeft twee oplossingen als  $D > 0$ , dus als  $Y^2 - Y - 2 > 0$ . Dit is waar als  $Y < -1$  of  $Y > 2$ . Aangezien  $Y$  uniform verdeeld is op  $(0, 5)$  geldt dat  $P(Y < -1) = 0$  en  $P(Y > 2) = 3/5$ . Dus de gevraagde kans is  $3/5$ .

**4.** De continue stochastische vector  $(X, Y)$  heeft dichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Laat zien dat  $f$  inderdaad een dichtheid is.

(b) Bereken  $P(X + Y < 1)$ .

**Oplossing:**

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy &= \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2 = xy]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{2} + y) dy = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X + Y < 1) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 x - x^2 + \frac{1}{2} - x \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5.  $X_1$  en  $X_2$  zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter  $\lambda = 1$ . Laat  $Y_1 = X_1 + X_2$ , en  $Y_2 = e^{X_1}$ . Bepaal de verdeling van  $(Y_1, Y_2)$ .

**Oplossing:**

Neem de functie  $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, e^{x_1}) = (y_1, y_2)$ , dan is  $(Y_1, Y_2) = g(X_1, X_2)$ . Voor de dichtheid van  $(Y_1, Y_2)$  bepalen we de inverse van  $g$ :

$$x_1 = \log y_2; \text{ en } x_2 = y_1 - \log y_2.$$

Van deze afbeelding bepalen we de matrix van partiële afgeleiden. Deze is

$$\begin{pmatrix} 0 & y_2^{-1} \\ 1 & -y_2^{-1} \end{pmatrix},$$

en de absolute waarde van de determinant hiervan is  $y_2^{-1}$ . Neem nu  $y_1 > \log y_2$  en  $y_2 > 1$  (het bereik van  $g$ ), dan vinden we dat

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = f_{(X_1, X_2)}(\log y_2, y_1 - \log y_2) \cdot y_2^{-1},$$

en aangezien de simultane dichtheid van  $X_1$  en  $X_2$  gegeven wordt door

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2},$$

leidt dit tot

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = e^{-\log y_2 - y_1 + \log y_2} y_2^{-1} = e^{-y_1} y_2^{-1},$$

voor  $y_1 > \log y_2$  en  $y_2 > 1$ .