

2e deeltentamen Kansrekening II

7 juni 2002, 10.45-12.30

1. Laat X_1 en X_2 onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn, uniform verdeeld op $(0, 1)$. Het minimum $\min\{X_1, X_2\}$ noemen we Y , het maximum $\max\{X_1, X_2\}$ noemen we Z .

(a) Laat zien dat voor $0 \leq y \leq z \leq 1$ geldt dat

$$P(Y \leq y, Z \leq z) = z^2 - (z - y)^2.$$

(b) Laat zien dat de simultane dichtheid f van (Y, Z) gegeven wordt door $f(y, z) = 2$ voor $0 \leq y \leq z \leq 1$, en $f(y, z) = 0$ anders.

(c) Bepaal de conditionele verdeling van Z gegeven $Y = y$ voor alle relevante waarden van y .

(d) Bereken $E(Z|Y = y)$ voor alle relevante waarden van y .

2. (a) Bereken verwachting en variantie van X als de dichtheid van X gegeven wordt door

$$f(x) = \frac{3x^2}{2},$$

voor $-1 \leq x \leq 1$, en $f(x) = 0$ anders.

(b) Bepaal de verdeling van $2X + 3$ voor de stochastische grootte X uit opgave (a).

3. Laat X_1 en X_2 onafhankelijke stochastische grootheden zijn die $N(0, 1)$ respectievelijk $N(0, 4)$ verdeeld zijn. Laat verder $Y_1 = X_1 + X_2$, en $Y_2 = X_1 - X_2$.

Laat zien dat de simultane dichtheid van (Y_1, Y_2) gegeven wordt door

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{1}{32}[5y_1^2 + 5y_2^2 + 6y_1y_2]}.$$

4. Beschouw twee rijen stochastische grootheden $U_1, U_2, \dots$ en $V_1, V_2, \dots$. Alle stochastische grootheden zijn onafhankelijk van elkaar, de U_i 's zijn allemaal uniform verdeeld op $(0, 1)$, en de V_i 's zijn exponentieel verdeeld met parameter 1.

We maken nu een nieuwe rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots$ als volgt: we gooien éénmalig met een zuivere munt (onafhankelijk van alle voorafgaande stochastische grootheden). Als kop boven komt dan definiëren

we $X_i = U_i$ voor alle i ; als munt boven komt definiëren we $X_i = V_i$ voor alle i .

(a) Laat zien dat $E(X_i) = 3/4$, voor alle i .

(b) Laat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Laat zien dat voor $\epsilon < 1/4$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{3}{4}\right| > \epsilon\right)$$

niet naar nul convergeert als $n \rightarrow \infty$.

(c) Waarom is (b) niet in strijd met de wet van de grote aantallen?