

1. (a) De verwachte uitbetaling onder voorwaarde dat $X_1 \leq a$ is precies gelijk aan het verwachte aantal ogen bij een worp met een zuivere dobbelsteen en dus $\mathbf{E}(Y \mid X_1 \leq a) = \frac{7}{2}$. Verder is $\mathbf{P}(Y = k \mid X_1 > a) = \mathbf{P}(X_1 = k \mid X_1 > a)$. Dus voor $k = a + 1, \dots, 5$ is $\mathbf{P}(Y = k \mid X_1 > a) = \frac{1}{6-a}$, en voor alle overige waarden van k is die kans 0. Daarom $\mathbf{E}(Y \mid X_1 > a) = \frac{1}{6-a}[(a+1) + \dots + 5] = \frac{7+a}{2}$.
(b) $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}(Y \mid X_1 \leq a)\mathbf{P}(X_1 \leq a) + \mathbf{E}(Y \mid X_1 > a)\mathbf{P}(X_1 > a)$ en dus $\mathbf{E}Y = \frac{7}{2} \cdot \frac{a}{6} + \frac{7+a}{2} \cdot \frac{6-a}{6} = \frac{7}{2} + \frac{a(6-a)}{12}$.
(c) Zoals onmiddellijk duidelijk, is $a(6-a)$ maximaal als $a = 3$ en daarom is voor $a = 3$ de verwachte uitbetaling maximaal en dus $4\frac{1}{4}$. (De grafiek van $a(6-a)$ is een bergparabool met nulpunten 0 en 6!)
2. (a) N is geometrisch ($p = \frac{1}{6}$) verdeeld en dus $\mathbf{E}N = \frac{1}{p} = 6$ en $\text{Var } N = \frac{1-p}{p^2} = 30$.
(b) Merk op dat $\frac{1}{k}S_k$ de geniddelde waarde is van een k -tal onafhankelijke gelijkverdeelde stochastische variabelen met verwachting en variantie. Volgens de sterke wet van grote aantallen geldt dan dat voor $a = \mathbf{E}N$ (de verwachting van die stochastische variabelen) $\mathbf{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}S_k = a) = 1$. Hier is dus $a = 6$.
(c) Zij Z standaard normaal verdeeld. Dan is volgens de centrale limietstelling (met continuïteits correctie) het getal $\mathbf{P}(\sqrt{120 \times 30Z + 120 \times 6 \leq 780,5})$ een goede benadering van $\mathbf{P}(S_{120} \leq 780)$. Dus de gevraagde benadering kan gegeven worden als $\mathbf{P}(60Z + 720 \leq 780,5) = \Phi(1 + \frac{1}{\sqrt{20}})$ welk getal in de tabel verschijnt als ongeveer $\Phi(1,01) = 0,8438$.
(d) Voor de formulering van de centrale limietstelling raadplege men het dictaat.
3. (a) $\mathbf{E}U = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$ en, omdat X en Y onafhankelijk zijn, $\text{Var } U = \text{Var } X + \text{Var } Y$. De variabele Y is continu homogeen verdeeld op $(0, 1)$ en heeft daarom verwachting $\mathbf{E}Y = \frac{1}{2}$ en variantie $\frac{1}{12}$. Voor X weten we dat $\mathbf{E}X = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}$ en dus $\mathbf{E}U = \frac{7}{6}$. Verder $\text{Var } X = \int_0^1 x^2 2x dx - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$. Dus $\text{Var } U = \frac{5}{36}$.
(b) Uit de convolutieformule volgt:
$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(u-x)dx = \int_0^1 2xf_Y(u-x)dx.$$
 Omdat we $f_Y(u-x)$ aan 1 gelijk mogen stellen, moet $0 < u-x < 1$. Dat leidt ertoe dat

$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq 0, \\ \int_0^u 2x dx = u^2 & , \quad 0 < u \leq 1, \\ \int_{u-1}^1 2x dx = 1 - (u-1)^2 & , \quad 1 < u \leq 2, \\ 0 & , \quad 0 < u \end{cases}$$

1

- (c) Merk op dat de waardenverzameling van Z het interval $(0, 4)$ is. Voor $0 < z < 1$ hebben we $F_Z(z) = \mathbf{P}(Z \leq z) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{z}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{z}} f_U(u)du = \int_0^{\sqrt{z}} u^2 du = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}$.
Voor $1 \leq z < 4$ hebben we $F_Z(z) = \mathbf{P}(Z \leq z) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{z}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{z}} f_U(u)du = \int_0^1 u^2 du + \int_1^{\sqrt{z}} 1 - (u-1)^2 du = -\frac{2}{3} + \sqrt{z} - \frac{1}{3}(\sqrt{z}-1)^3$. Voor $z \leq 0$ is de verdelingsfunctie 0 en voor $z \geq 4$ is de verdelingsfunctie 1.
4. (a) Een waardenverzameling is het vierkant met hoekpunten $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ en $(0, -1)$ in het vlak.
(b) De waardenverzameling van X is het interval $(-1, 1)$. Voor $-1 < x < 1$ hebben we dat $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy = \int_{(1-|x|)\frac{1}{2}}^{(1+|x|)\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = 1 - |x|$. Uit de symmetrie is verder zonder rekenen duidelijk dat $\mathbf{E}X = 0$ en dus $\text{Var } X = \mathbf{E}(X^2) = \int_{-1}^1 x^2(1 - |x|)dx = \frac{1}{6}$.
(c) $F_T(u) = \mathbf{P}(U \leq u) = \mathbf{P}(-\ln(|X| + |Y|) \leq u) = \mathbf{P}(\ln(|X| + |Y|) \geq -u)$. Nu elimineren we de $\ln$ en krijgen $F_T(u) = \mathbf{P}(|X| + |Y| \geq e^{-u}) = 1 - \mathbf{P}(|X| + |Y| < e^{-u}) = 1 - e^{-2u}$. De laatste gelijkheid volgt direct doordat de kans gelijk is aan de helft van de oppervlakte van het vierkant met hoekpunten $(e^{-u}, 0)$, $(0, e^{-u})$, $(-e^{-u}, 0)$ en $(0, -e^{-u})$. Uit de verdelingsfunctie blijkt dat U exponentieel verdeeld is met parameter 2.
- (d) Uit symmetrie-overwegingen is $f_Y(y) = f_X(y)$. In het bijzonder is een waardenverzameling van Y dan $(-1, 1)$. Voor $-1 < y < 1$ hebben we

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - |y|}, \quad \text{als } -1 + |y| < x < 1 - |y|.$$

Voor de overige waarden van x is $f_X(x \mid Y = y) = 0$.

2