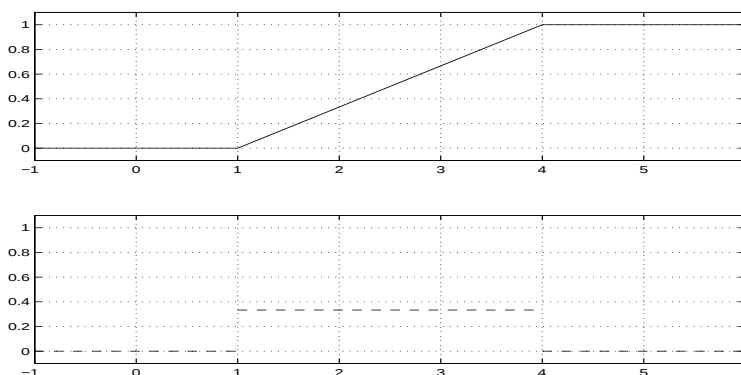


1. (a) De verdelingsfunctie F_X (getrokken lijn in de grafiek) en een kansdichtheid f_X (stippellijn in grafiek) worden gegeven door

$$f_X(a) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 < a < 4, \\ 0, & \text{elders} \end{cases} \quad F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ \frac{1}{3}(a-1), & 1 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$$



(b) $\mathbb{E}X = \frac{1+4}{2} = 2\frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} f_X(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{3} \sqrt{x} dx = \frac{14}{9}$.

(d) $\mathbb{V}ar Z = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \mathbb{E}X - (\mathbb{E}Z)^2 = \frac{13}{162}$.

- (e) De waardenverzameling W_Z van Z wordt gegeven door $W_Z = (1, 2)$. We berekenen voor $a \in W_Z$ de verdelingsfunctie F_Z van Z met

$$F_Z(a) = \mathbf{P}(Z \leq a) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq a) = \mathbf{P}(X \leq a^2) = F_X(a^2) = \frac{1}{3}(a^2 - 1),$$

waarbij we gebruiken dat de waardenverzameling van X het interval $(1, 4)$ is.
Dus

$$F_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ \frac{1}{3}(a^2 - 1), & 1 \leq a < 2, \\ 1, & 2 \leq a. \end{cases}$$

- (f) F_Z continu, ook in 1 en 2, differentieerbaar op $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ en de afgeleide is continu op $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Een kansdichtheid is dan $f_Z(a) = \begin{cases} \frac{2}{3}a, & 1 < a < 2, \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$
2. (a) X_n is binomiaal($n, p_n = \frac{5}{5+n}$) verdeeld.
 (b) $\mathbb{P}(X_5 = 3) = \binom{5}{3}(\frac{1}{2})^5$, $\mathbb{E}X_5 = 2\frac{1}{2}$, en $\mathbb{P}(X_{20} = 2) = \binom{20}{2}(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^{18}$.
 (c) Zij Y Poisson($120 \times \frac{5}{5+120}$) = Poisson($\frac{24}{5}$) verdeeld. Dan is $\mathbb{P}(Y = 2)$ een goede benadering van $\mathbb{P}(X_{120} = 2)$. Verder $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2!}(\frac{24}{5})^2 e^{-\frac{24}{5}}$.
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{5}{5+n} = 5$ en dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 5$.
 Dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \mathbb{P}(Z = 2)$ waarbij Z Poisson(5) verdeeld is. Verder $\mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2!}5^2 e^{-5}$.
3. (a) Er moet gelden $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. We berekenen $\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2 \int_0^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -2e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_0^{\infty} = 2$. Dus $c = \frac{1}{2}$.
 (b) $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}|x|^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Var} Z$, waarbij Z standaard normaal verdeeld is. Dus $\mathbb{E}Y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
4. (a) $1 = c \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} ((\frac{1}{2})^m)^n = c \sum_{m=1}^3 \frac{(\frac{1}{2})^m}{1 - (\frac{1}{2})^m} = c(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7})$. Dus $c = \frac{21}{31}$.
 (b) De waardenverzameling W_Y van Y is de natuurlijke getallen. Voor $n \in \mathbb{N}$ vinden we $p_Y(n) = \sum_{m=1}^3 p_{X,Y}(m, n) = \frac{21}{31}[(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n + (\frac{1}{8})^n]$.
 (c) $\mathbb{P}(X - Y = 1) = p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(3, 2) = \frac{21}{31}[(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^6] = \frac{21}{31} \frac{17}{64}$.