

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Rekenmachines zijn niet toegestaan. Het is echter onnodig uitdrukkingen met wortels of e-machten, ingewikkelde quotiënten, etc. te vereenvoudigen.

1. De stochastische variabelen $U_1, U_2, \dots$ zijn onafhankelijk en homogeen verdeeld op het interval $[0, 1]$. Laat

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2.$$

- Bepaal een getal c zodanig dat $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = c) = 1$.
 - Hoe groot moet n minimaal zijn om te zorgen dat (bij goede benadering) $\mathbb{P}(|Y_n - c| > 0.01) < 0.01$?
 - Formuleer de stellingen die u voor de oplossing van a) en b) gebruikt, zo kort en precies mogelijk.
2. De stochastische vector (X, Y) is absoluut continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x, y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y^5} e^{-\frac{1}{2}(x/y)^2}, \quad -\infty < x < \infty, y > 1.$$

- Bepaal de kansdichtheid van Y .
 - Voor $y > 1$ bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven $Y = y$. Welke bekende kansverdeling is dit?
 - Voor $y > 1$ laat zien dat $\mathbb{E}(X^2 | Y = y) = y^2$, bijvoorbeeld zonder rekenen op grond van het antwoord op b).
 - Bepaal $\mathbb{E}X^2$, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de voorgaande sommen.
3. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk en verdeeld volgens de de Gamma verdeling met parameters $(2, 1)$ en, respectievelijk, de exponentiële verdeling met parameter 1. (Dus X heeft kansdichtheid xe^{-x} voor $x > 0$.) We definiëren $U = X + Y$, $V = Y/X$ en $W = Y(X + Y)$.
- Bepaal een kansdichtheid van U .
 - Bepaal een kansdichtheid voor V .
 - Bepaal $\mathbb{E}W$.

Normering:

1a: 2	2a: 2	3a: 3
1b: 4	2b: 3	3b: 3
1c: 3	2c: 1	3c: 3
	2d: 3	

Eindcijfer = totaal/3+1