1. (a) De kansdichtheid $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f_X(a) = F'_X(a)$, $a \neq 0$. Dus

$$f_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \mathrm{e}^{-a}, & 0 \leq a. \end{cases}$$

De kansverdeling heet standaard exponentieel.

(b) Zoals uit de theorie bekend: $\mathbb{E}X = 1$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}X = 1$.

(c) De waardenverzameling W_Y is het interval $W_Y = (0, 1)$. De verdelingsfunctie F_Y van Y berekenen we voor $y \in W_Y$ als volgt: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{-X} \leq y) = \mathbb{P}(-X \leq \log y) = \mathbb{P}(X \geq -\log y) = 1 - \mathbb{P}(X \log y) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-(-\log y)}) = y$. Dus

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & 1 \leq y. \end{cases}$$

(d) Y is standaard homogeen verdeeld en dus de verwachting $\mathbb{E}Y = \frac{1}{2}$ (en $\mathbb{V}\mathrm{ar}Y = \frac{1}{12}$).

2. (a) We kunnen het nemen van een greep van drie touwtjes zien als het trekken zonder teruglegging van $n = 3$ prijzen uit $r = 100$ prijzen met $m = 3$ grote prijzen. Het aantal grote prijzen Y is hypergeometrisch$(r = 100, m = 3, n = 3)$ verdeeld. Dus $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{\binom{97}{2}\binom{3}{1}}{\binom{100}{3}}$. Verder $\mathbb{E}Y = 3\frac{3}{100} = \frac{9}{100}$.

(b) De stochastische variabele X kan beschouwd worden het aantal successen bij 3 onafhankelijke Bernoulli-proeven met succeskans $\frac{3}{100}$. De kansdichtheid p_X van X is dan gegeven door $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{3}{100})^k(\frac{97}{100})^{3-k}$, voor $k = 0, 1, 2, 3$. (Dus binomiaal$(n = 3, p = \frac{3}{100})$ verdeeld.) Verder $\mathbb{E}X = np = \frac{9}{100}$.

(c) Neem nu Z het aantal malen onafhankelijk trekken voor 3 maal een succes (= grote prijs). Dan is Z negatief binomiaal$(n = 3, p = \frac{3}{100})$ verdeeld.
Dus $\mathbb{P}(Z = 100) = \binom{99}{2}(\frac{3}{100})^3(\frac{97}{100})^{97}$.
De kans dat bij 100 proeven geen enkel succes optreedt is $(\frac{97}{100})^{100}$.

(d) De kans is $\frac{1}{100}$ omdat het gaat om één proef met kans op succes $\frac{1}{100}$.

Z.O.Z.

3. X is het aantal cm regen. Dan is X normaal($\mu = 80, \sigma = 20$) verdeeld. Dus $Y = \frac{X-80}{20}$ is standaard-normaal verdeeld.

   (a) $\mathbb{P}(X > 100) = \mathbb{P}(Y > \frac{100-80}{20}) = \mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

   (b) We willen $\mathbb{P}(Y > a) = 0.01$. Dus $\mathbb{P}(Y \leq a) \geq 0.99$. Dan (tabel) $a = 2.33$. Dus $\frac{x-80}{20} = 2.33$. We krijgen voor de gevraagde diepte $80 + 20 * 2.33 = 126.6$.

   (c) Zij Z het aantal jaren nodig voor tenminste 100 cm regen. Dan is Z geometrisch(0.1587) verdeeld. Dus de gevraagde $\mathbb{P}(Z > 10) = (1 - 0.1597)^{10} = (0.8413)^{10}$.

4. (a) Als het punt (s,t) in V, dan is

$$\mathbb{P}(X \leq s, Y \leq t) = \frac{st - \frac{s^2}{2}}{2} = 2st - s^2.$$

   (Uitleg: het gaat om de rechthoek met zijden s en t minus de driehoek van 0 tot s onder de lijn $s = t$.) Als $0 < t < s < 1$ dan $\mathbb{P}(X \leq s, Y \leq t) = t^2$. (Uitleg: neem de rechthoek met zijden s en t doorsneden met V. Je houdt alleen de driehoek over met hoekpunten (0,0),(t,t),(0,t).) Dus

$$F_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} 2st - s^2, & 0 < s < t < 1, \\ t^2, & 0 < t \leq s < 1, \end{cases}$$

   (b)

$$\lim_{t\to\infty} F_{X,Y}(s,t) = F_{X,Y}(s,1) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 2s - s^2, & 0 \leq s < 1, \\ 1, & 1 \leq s. \end{cases}$$

   (c) De waardenverzameling van Z is het interval $W_Z = (0,2)$. Als $0 < a < 1$ dan $\mathbb{P}(Z \leq a) = \frac{1}{2}a^2$. Als $1 \leq a < 1$ dan $\mathbb{P}(Z \leq a) = 1 - \frac{1}{2}(2-a)^2$. Dus

$$F_z(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{2}a^2, & 0 \leq a < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-a)^2, & 1 \leq a < 2, \\ 1, & 2 \leq a. \end{cases}$$