

Dit tentamen is voor studenten BWI, Econometrie en Wiskunde. Studenten BWI en Econometrie maken sommen 1, 2, 3 en 4. Studenten Wiskunde maken sommen 1, 2, 3 en 5. Studenten met een dubbele studierichting waaronder Wiskunde maken het Wiskunde tentamen.

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.

1. De stochastische vector (X, Y) is absoluut continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & \text{als } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } y > 0, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

- Schets het waardenbereik van (X, Y) .
 - Bepaal de constante c .
 - Bepaal een kansdichtheid van X .
 - Laat zien dat X symmetrisch verdeeld is. Wat is op grond hiervan $\mathbb{E}X$?
 - Laat zien dat $\mathbb{E}(X\sqrt{Y}) = 0$.
 - Bereken $\text{var}(X\sqrt{Y})$.
 - Zijn X en Y onafhankelijk?
2. Een dominospel bestaat uit 20 dominostenen die staande in een houten doos worden verpakt. De dikte van een steen is normaal verdeeld met verwachting 1 cm en variantie 0.1 cm². De lengte van de houten doos is normaal verdeeld met verwachting 20.5 cm en variantie 0.25 cm². Twintig keer de dikte van een steen moet in de lengte van de doos passen.
- Bepaal de kans dat een aselechte greep van 20 dominostenen niet in een aselekt gekozen doos passen.
 - Hoeveel langer dan 20.5 cm moet de doos zijn, opdat, bij gelijke varianties en gelijke verwachte dikte van de stenen, met kans 99 % de stenen in de doos passen?
 - Veronderstel dat de dikte van een dominosteent niet normaal verdeeld is. Heeft het antwoord op vraag a) dan nog enige waarde? Licht uw antwoord toe.

3. De stochastische vector (X, Y) is discreet verdeeld met kansdichtheid

$$p(x, y) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{xy+1}, \quad x \in \{1, 2\}, y \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

- Bepaal de kansdichtheid van X .
 - Voor gegeven $x \in \{1, 2\}$ laat zien dat $\mathbb{E}(Y|X = x) = (\frac{1}{2})^x / (1 - (\frac{1}{2})^x)$. (N.B. Voor iedere $p \in (0, 1)$ geldt $\sum_{k=0}^{\infty} kp^k = p/(1-p)^2$.)
 - Bepaal $\mathbb{E}Y$ door gebruik te maken van b).
 - Bepaal de kansdichtheid van $Z = XY$. (N.B. Beschouw even en oneven waarden in het waardenbereik van Z afzonderlijk.)
4. (Alleen voor BWI en Econometrie.) Een trimmer gaat hardlopen op een parcours van 10 kilometer met een konstante snelheid. Op een aselekt gekozen plaats in het parcours besluit hij op te houden met hardlopen en verder te wandelen: terug naar het begin of verder naar het eindpunt, het dichtsbijzijnde van die twee punten. Laat X de afstand die hij zal hardlopen en laat Y de afstand die hij zal wandelen.
- Welke bekende kansverdeling bezit X ?
 - Laat zien dat $\mathbb{E}Y = 2\frac{1}{2}$.
 - Bereken $\mathbb{E}(X + Y)$.

5. (Alleen voor Wiskunde.) Laat $\{N(t): t \geq 0\}$ het Poisson proces zijn met intensiteit 1. Noteer de tijdstippen van de gebeurtenissen met $S_1, S_2, \dots$ en laat $S_0 = 0$. Definieer verder $U_t = t - S_{N(t)}$. Zoals bekend bezit S_k voor $k \geq 1$ de kansdichtheid

$$f_{S_k}(s) = \frac{1}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-s}.$$

- Bepaal $\mathbb{P}(N(t) = 0, U_t > u)$ voor $0 \leq u < t$.
- Bepaal $\mathbb{P}(N(t) = k, U_t > u)$ voor $k \in \mathbb{N}$ en $0 \leq u < t$. Geef een volledig bewijs gebruikmakend van de formule voor f_{S_k} en de definitie van het Poisson proces als vernieuwingsproces, maar zonder te verwijzen naar op het college afgeleide eigenschappen van het Poisson proces.
- Controleer het antwoord op b) door de eventualiteit van b) te herschrijven in termen van geschikte aangroeiingen van $\{N(t): t \geq 0\}$ en vervolgens bekende eigenschappen van deze aangroeiingen te gebruiken.
- Bepaal met behulp van a) en b) de verdeling van $N(t)$ en de verdelingsfunctie van U_t . Wat is nu $\mathbb{P}(U_t = t)$?
- Bepaal de voorwaardelijke verdeling van U_t gegeven dat $N(t) = k$.

Normering:

1a: 1	2a: 3	3a: 2	4a: 2	5a: 1
1b: 1	2b: 3	3b: 2	4b: 4	5b: 2
1c: 2	2c: 3	3c: 2	4c: 3	5c: 2
1d: 1		3d: 3		5d: 2
1e: 1				5e: 2
1f: 1				
1g: 2				

Eindcijfer = totaal/4+1