1.

a.

$$\iint f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 c(x^3+y^3)\,dxdy = \tfrac{1}{2}c.$$

Er volgt dat $c = 2$.

b.

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 2(x^3+y^3)\,dy = 2x^3 + \frac{1}{2}, & \text{als } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}.$$

2. Vanwege de onafhankelijkheid van X en Y voldoet de simultane dichtheid van (X,Y) aan

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Invullen van de homogene dichtheden van X en Y geeft voor $f_{X,Y}(x,y)$ de waarde 1 voor (x,y) in het eenheidsvierkant en 0 daarbuiten. De vector (X,Y) is dus verdeeld als een willekeurig gekozen punt uit het eenheidsvierkant.

a. Aangezien X en Y beide met kans 1 positief zijn, is Z dat ook en dus $F_Z(z) = 0$ voor $z < 0$. Voor $z \ge 0$ geldt

$$F_Z(z) = \iint_{\{(x,y):y/x \le z\}} 1\,dx\,dy.$$

Maak een plaatje van het integratie gebied! Voor $0 \le z < 1$ reduceert de integraal tot

$$\int_0^1 \int_0^{zx} dy\,dx = \tfrac{1}{2}z.$$

Voor $z \ge 1$ is het handiger eerst op het complement over te gaan en is de integraal gelijk aan

$$1 - \int_0^1 \int_0^{y/z} dx\,dy = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{1}{z}.$$

b. Voor $z \notin 0, 1$ is de verdelingsfunctie continu differentieerbaar met afgeleide

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < z < 1, \\ \frac{1}{2} 1/z^2, & z > 1. \end{cases}$$

Om the controleren dat deze functie inderdaad een kansdichtheid is voor Z gaan we na dat $F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(s)\,ds$ voor alle $z \in \mathbb{R}$. Omdat F_Z overal continu is en stuksgewijs continu differentieerbaar is, volgt dit ook (zonder rekenwerk) uit een uitbreiding van de hoofdstelling van de integraalrekening.

3.

a.

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

b. Voor $x > 0$ en $y > 0$ geldt dat

$$F_X(x)F_Y(y) = (1 - e^{-\frac{1}{2}x^2})(1 - e^{-y}) = F_{X,Y}(x,y).$$

Voor andere $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ geldt eveneens dat $F_X(x)F_Y(y) = F_{X,Y}(x,y)$ (waarbij zowel links als rechts 0 komt te staan). Derhalve zijn X en Y onderling onafhankelijk.

c. We kunnen berekenen

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Vervolgens moeten we controleren of dit inderdaad een kansdichtheid van (X,Y) is, namelijk dat $F_{X,Y}(x,y)(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Een alternatief is om gebruik te maken van b.). Daartoe berekenen we eerst de marginale dichtheden

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Dat deze differentiaties inderdaad de marginale dichtheden geven volgt uit het feit dat de verdelingsfuncties F_X en F_Y continu differentieerbaar zijn op $\mathbb{R} - \{0\}$ en continu op heel $\mathbb{R}$. (Vergelijk som 2b.) Vanwege de onafhankelijkheid van X en Y volgt nu dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Dit geeft de dezelfde functie als bij de eerste methode. Dit is dus een kansdichtheid.

4.

a. Voor $y \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^y e^{-y(x-1)}(1 - e^{-y}) = (\tfrac{1}{2})^y (1 - e^{-y}) \sum_{x=1}^{\infty} e^{-y(x-1)}$$
$$= (\tfrac{1}{2})^y (1 - e^{-y}) \frac{1}{1 - e^{-y}} = (\tfrac{1}{2})^y.$$

Derhalve is Y geometrisch verdeeld met parameter $\frac{1}{2}$. (We kunnen nog opmerken $p_Y(y) = 0$ voor $y \notin \mathbb{N}$.)

b. Voor $x \in \mathbb{N}$ en $y \in \mathbb{N}$ geldt

$$p_X(x|\,Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{(\frac{1}{2})^y e^{-y(x-1)}(1 - e^{-y})}{(\frac{1}{2})^y} = e^{-y(x-1)}(1 - e^{-y}).$$

(Dit is een geometrische verdeling met parameter e^{-y}.) Voor $x \notin \mathbb{N}$ geldt $p_X(x|\,Y = y) = 0$.

c. De stochastische grootheden X en Y zijn niet onderling onafhankelijk, want $p_X(x|\,Y = y)$ hangt duidelijk van y af. Bij onafhanklijkheid had dit gelijk moeten zijn aan $p_X(x)$ voor alle x, y. Nu geldt bijvoorbeeld $p_X(1|\,Y = 1) = 1 - e^{-1}$ en $p_X(1|\,Y = 2) = 1 - e^{-2}$. (Een alternatieve oplossing is om eerst ook $p_X(x)$ uit te rekenen en daarna te controleren dat niet geldt $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ voor alle x, y.)