Dit tentamen is voor studenten BWI, Econometrie en Wiskunde. Studenten BWI en Econometrie maken sommen 1, 2, 3 en 4. Studenten Wiskunde maken sommen 1, 2, 3 en 5. Studenten met een dubbele studierichting waaronder Wiskunde maken het Wiskunde tentamen.
U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.

1. De stochastische vector (X, Y) is absoluut continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}}, & \text{als } y > x^2, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   a. Laat zien dat X normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie $\frac{1}{2}$.
   b. Laat zien dat een marginale dichtheid van Y wordt gegeven door $2\sqrt{y}e^{-y}/\sqrt{\pi}$ voor $y > 0$.
   c. Voor gegeven x bepaal een voorwaardelijke kansdichtheid van Y gegeven $X = x$.
   d. Voor gegeven x bepaal $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$.
   e. Bepaal $\mathbb{E}Y$.

2. De levensduur van een artikel kan worden gelijk gesteld aan het minimum $X = \min(Y, Z)$ van de levensduren Y en Z van twee onderdelen. We veronderstellen dat Y en Z onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met parameters 1 en 2.
   a. Bepaal een kansdichtheid van X.
   b. Welke waarden bezitten $\mathbb{E}X$ en $\operatorname{var} X$?

   We veronderstellen dat de levensduren van een partij van 100 artikelen kunnen worden beschouwd als onafhankelijke stochastische grootheden met dezelfde kansverdeling als X. We definiëren S als de som van deze levensduren.
   c. Bepaal $\mathbb{E}S$ en $\operatorname{var} S$.
   d. Bepaal een benadering voor de kans dat S groter is dan $110/3$.
   e. Welke bekende kansverdeling bezit S? Geef een toelichting op uw antwoord, zonder rekenwerk.

3. We voeren een rij identieke experimenten uit, onafhankelijk van elkaar, waarbij ieder experiment drie mogelijke uitkomsten bezit, genaamd A, B en C, optredend met kansen 1/4, 1/2 en 1/4. Nummer de experimenten met 1, 2, 3, etc. We definiëren X, Y en Z als het nummer van het eerste experiment met uitkomst, respectievelijk, A, B en C.
   a. Wat is de marginale verdeling van X?
   b. Bepaal $\mathbb{P}(X = 4, Y = 10)$.
   c. Bepaal een kansdichtheid voor (X, Y).
   d. Zijn X en Y onafhankelijk?
   e. Bepaal een kansdichtheid van $Z = X - Y$.

(ZOZ)

4. (Alleen voor BWI en Econometrie.) De stochastische vector (X, Y) is absoluut continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2 y}, & \text{als } x > 1, y > 0 \\ 0, & \text{als } x \leq 1 \text{ of } y \leq 0. \end{cases}$$

   a. Maak een schets van de verzameling $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y \leq z\}$, voor gegeven $z > 0$.
   b. Laat zien dat $Z = X^2 Y$ een exponentiële verdeling bezit met parameter 1.
   c. Bepaal $\mathbb{E}(X^2 Y)^2$.
   d. Bepaal $\mathbb{E}e^{Z-X-Y}$.

5. (Alleen voor Wiskunde.) Laat $\{N(t): t \geq 0\}$ het Poisson proces zijn met intensiteit 1. Noteer de tijdstippen van de gebeurtenissen met $S_1, S_2, \ldots$ en laat $S_0 = 0$. Definieer verder $U_t = t - S_{N(t)}$. Zoals bekend bezit S_k voor $k \geq 1$ de kansdichtheid

$$f_{S_k}(s) = \frac{1}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-s}.$$

   a. Bepaal $\mathbb{P}(N(t) = 0, U_t > u)$ voor $0 \leq u < t$.
   b. Bepaal $\mathbb{P}(N(t) = k, U_t > u)$ voor $k \in \mathbb{N}$ en $0 \leq u < t$. Geef een volledig bewijs gebruikmakend van de formule voor f_{S_k} en de definitie van het Poisson proces als vernieuwingsproces, maar zonder te verwijzen naar op het college afgeleide eigenschappen van het Poisson proces.
   c. Controleer het antwoord op b) door de eventualiteit van b) te herschrijven in termen van geschikte aangroeiingen van $\{N(t): t \geq 0\}$ en vervolgens bekende eigenschappen van deze aangroeiingen te gebruiken.
   d. Bepaal met behulp van a) en b) de verdeling van $N(t)$ en de verdelingsfunctie van U_t. Wat is nu $\mathbb{P}(U_t = t)$?
   e. Bepaal de voorwaardelijke verdeling van U_t gegeven dat $N(t) = k$.

Normering:

1a: 2	2a: 3	3a: 2	4a: 1	5a: 1
1b: 1	2b: 1	3b: 1	4b: 3	5b: 2
1c: 2	2c: 2	3c: 2	4c: 2	5c: 2
1d: 2	2d: 2	3d: 2	4d: 3	5d: 2
1e: 2	2e: 1	3e: 2		5e: 2

Eindcijfer = totaal/4+1