

Tentamen Kansrekening II voor BWI



18 augustus 2004, 13.30 -16.30

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Er zijn 44 punten te behalen, het eindcijfer wordt gegeven door $(5 + \text{behaalde punten})/4,9$.
- Geef een toelichting bij je antwoorden!
- Het gebruik van zelf meegebrachte handgeschreven formulebladen is toegestaan (maximaal 14 A4-tjes, enkelzijdig beschreven).
- Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, integralen mogen hier echter niet mee worden uitgerekend.

1. Laat X en Y onafhankelijke continue stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- (a) (3 punten) Bereken de (cumulatieve) verdelingsfunctie van X .
- (b) (3 punten) Bereken de variantie van X .
- (c) (4 punten) Bereken de dichtheidsfunctie van $Z = X + Y$.

2. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{als } x \geq 0, y \geq 0 \text{ en tevens } x + y \leq 4, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) (3 punten) Laat zien dat de marginale dichtheidsfunctie van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4-x) & \text{als } x \in [0, 4], \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- (b) (3 punten) Zijn X en Y onafhankelijk? Waarom?
- (c) (4 punten) Bereken de covariantie tussen X en Y .

3. De continue stochasten X en Y hebben een gezamenlijke dichtheidsfunctie die gegeven wordt door

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-xy} & \text{als } 1 \leq x \leq 2 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- (a) (4 punten) Bereken $E(Y/X)$.
- (b) (3 punten) Laat zien dat X uniform verdeeld is op het interval $[1, 2]$.
- (c) (4 punten) Bereken, voor $1 \leq x \leq 2$, $E(Y|X = x)$.

4. (4 punten) De stochasten V en W zijn onafhankelijke normaal verdeelde stochasten met $E(V) = 3$, $\text{Var}(V) = 9$, $E(W) = 5$ en $\text{Var}(W) = 16$. Druk $P(V - W > -1)$ uit in de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef een benadering van deze kans met behulp van tabel 5.1 (zie bijlage).

5. (4 punten) De stochast X heeft een moment-genererende functie die voor $|t| < 1$ gegeven wordt door

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

Bereken de variantie van X .

6. (5 punten) Een tentamen bestaat uit 50 meerkeuze vragen. Bij elke vraag moet een keuze gemaakt worden uit vier mogelijke antwoorden, waarvan één antwoord het juiste is. Een student heeft het tentamen niet geleerd en besluit alle antwoorden te gokken. Voor $i \in \{1, \dots, 50\}$ schrijven we $X_i = 1$ als de student de i de vraag juist beantwoordt en $X_i = 0$ indien hij een onjuist antwoord geeft. Je mag aannemen dat de X_i s onafhankelijk van elkaar zijn en dat voor alle i , $P(X_i = 0) = \frac{3}{4}$ en $P(X_i = 1) = \frac{1}{4}$.

De student zal slagen voor het tentamen als hij minstens dertig vragen goed beantwoordt. Benader, met behulp van de centrale limietstelling, de kans dat de student slaagt. Druk je antwoord eerst uit in de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef daarna een benadering met behulp van tabel 5.1 (zie bijlage).

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Bijlage bij het tentamen
Kansrekening II voor BWI,
18 augustus 2004.