

Korte uitwerkingen tweede deeltentamen kansrekening II voor BWI
26 mei 2004

1 (a) Teken in het xy -vlak de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(1, 1)$. Het binnengebied van deze driehoek en het lijnstuk tussen de punten $(1, 0)$ en $(0, 1)$ (deze punten niet meegerekend) vormen het gevraagde gebied.

(b) Voor $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= \int_0^{1-x} 24xy dy = [12xy^2]_0^{1-x} = 12x(1-x)^2. \end{aligned}$$

Analoog kan de dichtheid van Y berekend worden.

(c) We berekenen eerst $f_{Y|X}(y|x)$ voor $0 < x < 1$:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

Dus als $0 < y < 1$ en tevens $x + y \leq 1$ geldt dat

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{24xy}{12x(1-x)^2},$$

voor andere y geldt dat $f_{Y|X}(y|x) = 0$. We concluderen dat voor $0 < x < 1$:

$$E(Y|X) = \int_0^{1-x} y \frac{24xy}{12x(1-x)^2} dy = \frac{2}{3}(1-x).$$

(d) $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Bereken eerst

$$E(Y) = E(X) = \int_0^1 x \cdot 12x(1-x)^2 dx = \frac{2}{5}.$$

Bereken vervolgens

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \cdot 24xy dy dx = \frac{2}{15},$$

(het rekenwerk is weggelaten), concludeer dat $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{2}{75}$.

2. Voor $t < 1$ geldt dat

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-1}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x-1} dx \\ &= \int_{-1}^{\infty} e^{tx-x-1} dx = \left[\frac{e^{x(t-1)-1}}{t-1} \right]_{-1}^{\infty} = -\frac{e^{-t}}{t-1}. \end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we (nog steeds voor $t < 1$)

$$M'(t) = \frac{e^{-t}(t-1) + e^{-t}}{(t-1)^2}$$

en er volgt dat $E(X) = M'(0) = 0$.

3. Gevraagd wordt de gezamenlijke dichtheid van $U = X$ en $V = X + Y$. We berekenen eerst de inverse transformatie: $x = u$ en $y = v - u$. De jacobiaan van de inverse transformatie wordt gegeven door

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| = 1.$$

Er geldt dat voor $u \geq 0$, $v - u \geq 0$,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, v - u) |1| = \frac{1}{2} v e^{-v}.$$

Voor andere (u, v) geldt dat $f_{U,V}(u, v) = 0$.

4. (a) Met een benadering mbv de centrale limietstelling geldt:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{40}}{40} \leq 0.998\right) &= P(X_1 + \dots + X_{40} \leq 0.998 \cdot 40) = \\ &= P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{40} - 40}{0,005\sqrt{40}} \leq \frac{0.998 \cdot 40 - 40}{0,005\sqrt{40}}\right) \\ &\approx \Phi(-2,52) = 1 - \Phi(2,52) \approx 1 - 0,9941 = 0,0059. \end{aligned}$$

(b) Ik noteer de hoeveelheden melk in de 25 geteste pakken weer met $X_1, \dots, X_{25}$. Merk op dat

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{25}}{25} \leq 0.997\right) &= P(X_1 + \dots + X_{25} \leq 0.997 \cdot 25) = \\ &= P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{25} - 25\mu}{0,005\sqrt{25}} \leq \frac{0.997 \cdot 25 - 25\mu}{0,005 \cdot 5}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{0.997 \cdot 25 - 25\mu}{0,005 \cdot 5}\right). \end{aligned}$$

Deze laatste kans moet ongeveer 0,01 opleveren. Kijk in de tabel van de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling en merk op dat $\Phi(2,33) \approx 0,99$, dus $\Phi(-2,33) \approx 0,01$. We moeten dus oplossen

$$\frac{0.997 \cdot 25 - 25\mu}{0,005 \cdot 5} \approx -2,33$$

dus als $\mu \approx 0,99933$ (zeg maar $\mu \approx 1$) dan geldt dat de kans dat de fabrikant korting moet geven ongeveer gelijk is aan 0,01.