

Uitwerkingen eerste deeltentamen kansrekening II voor BWI
24 maart 2004

1 (a) Merk eerst op dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, omdat $|\alpha x| \leq 1$ voor $|x| \leq 1$. Verder geldt dat

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1 + \alpha x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\alpha x^2 \right]_{-1}^1 = 1. \end{aligned}$$

(b) Merk op dat $F_X(x) = 0$ voor $x < -1$, $F_X(x) = 1$ voor $x > 1$ en voor $-1 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-1}^x \frac{1 + \alpha u}{2} du \\ &= \left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\alpha u^2 \right]_{-1}^x \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\alpha x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha. \end{aligned}$$

(c) We berekenen eerst de verwachting van X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^1 x \frac{1 + \alpha x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}\alpha x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\alpha. \end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^1 x^2 \frac{1 + \alpha x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}\alpha x^4 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

en $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\alpha^2$.

(d) Ofwel je berekent eerst de verdelingsfunctie van Y en dan de dichtheidsfunctie ofwel je gebruikt dat voor $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\sin y) \left| \frac{d \sin y}{dy} \right| \\ &= \frac{1 + \alpha \sin y}{2} \cos y. \end{aligned}$$

Voor $y \notin [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ geldt dat $f_Y(y) = 0$.

2. Merk op dat $\frac{X-7}{5}$ standaard normaal verdeeld is. Nu geldt dat

$$\begin{aligned} P(5 < X < 11) &= P\left(-\frac{2}{5} < \frac{X-7}{5} < \frac{4}{5}\right) = \Phi(0,8) - \Phi(-0,4) \\ &= \Phi(0,8) - (1 - \Phi(0,4)) = 0,7881 - 1 + 0,6554 = 0,4335. \end{aligned}$$

3. (a) Voor $x \in [0, 1]$ geldt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}(x + 2y) dy = \\ &= \left[\frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}y^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Voor $x \notin [0, 1]$ geldt dat $f_X(x) = 0$.

(b) X en Y zijn niet onafhankelijk, de gezamenlijke dichtheidsfunctie is niet te schrijven als $g(x)h(y)$ voor zekere functies g en h . Je kunt ook de marginale dichtheid van Y uitrekenen en opmerken dat $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

(c) Maak voor jezelf een plaatje.

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{2}{3}(x + 2y) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}y^2 \right]_x^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x \right]_0^1 = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Je had ook $\int_0^1 \int_0^y f_{X,Y}(x, y) dx dy$ kunnen berekenen.

4. Voor $z \geq 0$ geldt

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(\min(X, Y) \leq z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) \\ &= 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - \int_z^\infty \int_z^\infty \lambda \mu e^{-\mu x} e^{-\mu y} dx dy \\ &= 1 - \int_z^\infty \mu e^{-\mu y} [-e^{-\lambda x}]_z^\infty dy \\ &= 1 - \int_z^\infty \mu e^{-\mu y} e^{-z} dy = \dots = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}, \end{aligned}$$

dus Z is exponentieel verdeeld met parameter $\lambda + \mu$. Je had ook kunnen opmerken dat X en Y onafhankelijk zijn en dat X exponentieel verdeeld is met parameter λ en Y exponentieel verdeeld is met parameter μ en met behulp van deze gegevens bovenstaande verdelingsfunctie kunnen berekenen. Er geldt dan $P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z)$ wegens onafhankelijkheid.