

OPGAVES (UITWERKINGEN)

1. (a) Gebruik $dF/dx(x) = f(x)$ om af te leiden dat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha e^{\alpha x}, & \text{als } x < 0, \\ \frac{1}{2}\beta e^{-\beta x}, & \text{als } x \geq 0, \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\alpha x e^{\alpha x} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\beta x e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 y e^y dy + \frac{1}{2\beta} \int_0^{\infty} z e^{-z} dz \end{aligned}$$

waarbij we hebben gesubstitueerd $y = \alpha x$, $z = \beta x$. Partiële integratie geeft:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 y e^y dy &= y e^y \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^y dy = -e^y \Big|_{-\infty}^0 = -1, \\ \int_0^{\infty} z e^{-z} dz &= -z e^{-z} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-z} dz = -e^{-z} \Big|_0^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $E[X] = 1/(2\beta) - 1/(2\alpha)$.

(c)

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha} \right)^2.$$

- (d) We zien dat $F(0) = \frac{1}{2}$, dus de mediaan $m[X] = 0$ voor alle $\alpha, \beta > 0$. Mediaan en verwachting zijn gelijk als $E[X] = 0$. Oplossing van de vergelijking $1/(2\alpha) - 1/(2\beta) = 0$ leidt tot $\alpha = \beta$.

2. (a)

$$P(X > 4) = P(X - 3 > 1) = P\left(\frac{X - 3}{2} > \frac{1}{2}\right).$$

Omdat $X \sim N(3, 4)$ is $(X - 3)/2 \sim N(0, 1)$, dus:

$$P\left(\frac{X - 3}{2} > \frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 - 0.6915 = 0.3085.$$

waarbij de benadering voor $\Phi(\frac{1}{2})$ uit tabel 5.1 afkomstig is.

(b)

$$\begin{aligned} P(|X - 3| \leq \tfrac{1}{2}) &= P\left(-\tfrac{1}{2} \leq X - 3 \leq \tfrac{1}{2}\right) = P\left(-\tfrac{1}{4} \leq (X - 3)/2 \leq \tfrac{1}{4}\right) \\ &= \Phi\left(\tfrac{1}{4}\right) - \Phi\left(-\tfrac{1}{4}\right) = \Phi\left(\tfrac{1}{4}\right) - \left(1 - \Phi\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \\ &= 2\Phi\left(\tfrac{1}{4}\right) - 1 \approx 2 \times 0.5987 - 1 = 2 \times 0.0987 = 0.1974. \end{aligned}$$

waarbij de benadering voor $\Phi(\frac{1}{4})$ uit tabel 5.1 afkomstig is.

(c)

$$P(X \leq \xi) = P((X - 3)/2 \leq (\xi - 3)/2) = \Phi((\xi - 3)/2) \approx 0.995.$$

Uit de tabel lezen we af dat $(\xi - 3)/2 = 2.57$ voldoet. Daaruit volgt $\xi = 8.14$. ($\xi = 8.16$ is ook goed.)

3. (a) Indien $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, $f_X(x) = 0$ en als $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 6 \int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1) dy = 6 \left[x^2 y + xy^2 + \frac{1}{3} y^3 - 2xy - y^2 + y \right]_0^1 \\ &= 6 \left(x^2 + x + \frac{1}{3} - 2x - 1 + 1 \right) = 6 \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

(b)

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = 6 \int_0^1 (x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x) dx = 6 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- (c) Er zijn drie mogelijke methodes om dit probleem op te lossen. Ten eerste, een oplossing die van een symmetrie van de verdeling gebruik maakt. Merk op dat:

$$P(X + Y \geq 1) + P(X + Y < 1) = 1,$$

Aangezien op het domein $[0, 1]^2$ de dichtheid geschreven kan worden als $f_{XY}(x, y) = 6(x + y - 1)^2$ (een parabolisch profiel waarvan het dal over de lijn $x + y = 1$ loopt) zijn de twee termen hierboven gelijk en we concluderen dat $P(X + Y \geq 1) = \frac{1}{2}$. De tweede methode gebruikt de hint als volgt. Om te beginnen geldt: $P(X + Y \geq 1) = P((X, Y) \in A)$, waarbij:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [1 - x, 1] \}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} P(X + Y \geq 1) &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 f_{XY}(x, y) dy dx = 6 \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x + y - 1)^2 dy dx \\ &= 2 \int_0^1 [(x + y - 1)^3]_{1-x}^1 dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2} [x^4]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De derde methode gebruikt de hint niet en vereist daarom enig nauwkeurig rekenwerk, waarbij we weer A gebruiken:

$$\begin{aligned} P(X + Y \geq 1) &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 f_{XY}(x, y) dy dx \\ &= 6 \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1) dy dx \\ &= 6 \int_0^1 \left[x^2 y + xy^2 + \frac{1}{3} y^3 - 2xy - y^2 + y \right]_{1-x}^1 dx \\ &= 6 \int_0^1 \left(x^2 + x + \frac{1}{3} - 2x - x^2(1-x) - x(1-x)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3}(1-x)^3 + 2x(1-x) + (1-x)^2 - (1-x) \right) dx \\ &= 6 \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}(1-x)^3 + (1-x)^2 - (1-x) + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= 6 \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}u^3 + u^2 - u + \frac{1}{3} \right) du = 6 \left[-\frac{1}{12}u^4 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

waarbij we in de zesde stap $u = 1 - x$ substitueren.