

[illegible]

(i). Geef een uitdrukking voor de verdelingsfunctie F van X .

(ii). Bewijs: M_n is absoluut-continu verdeeld met dichtheid g_n bepaald door

$$g_n(x) = n b^{-n} x^{n-1} \quad [x \in (0, b)].$$

Definieer nu de ‘schatter’ T_n van b door

$$T_n := \frac{n+1}{n} M_n.$$

(iv). Bewijs dat T_n zuiver is voor b , d.w.z. dat $\mathbb{E}T_n = b$, en laat met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev zien dat T_n voor $n \rightarrow \infty$ in waarschijnlijkheid naar b convergeert, d.w.z. dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|T_n - b| \geq a) = 0$ voor alle $a > 0$.

Opgave 2. Beschouw een rij van onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen. Zij X het aantal worpen dat nodig is voor het gooien van een ‘vijf’ en laat Y het aantal voor een ‘zes’ benodigde worpen zijn. Definieer:

$$U := \min\{X, Y\}, \quad V := \max\{X, Y\} \quad \text{en} \quad D := V - U.$$

- (i). Wat heeft X voor verdeling? En Y ? Waarom zijn X en Y afhankelijk?
- (ii). Bepaal door een geschikte interpretatie van U ook de verdeling van U .
- (iii). Zij $k, m \in \mathbb{N}$. Herformuleer de eventualiteit $\{U = k; D = m\}$ eerst in termen van X en Y en vervolgens in termen van de eerste $k + m$ worpen, bepaal met behulp hiervan $\mathbb{P}(U = k; D = m)$ en concludeer dat

$$\mathbb{P}(U = k; D = m) = \mathbb{P}(U = k) \mathbb{P}(X = m).$$

Waarom zijn U en D nu onafhankelijk?

Voor de vragen (iv) en (v) brengen we in herinnering dat de variantie van een geometrisch (p) verdeelde stochastische variabele gegeven wordt door $(1-p)/p^2$.

(iv). Schrijf $U + V$ in termen van U en D , en laat vervolgens met behulp van (iii) zien dat $\text{Var}(U + V) = 54$.

(v). Laat met behulp van (iv) zien dat X en Y negatief gecorreleerd zijn, dus: $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

Opgave 3. Zij (X, Y) een $\mathbb{R}_+^2$ -waardige, absoluut-continu verdeelde stochastische vector met kansdichtheid f bepaald door

$$f(x, y) = x e^{-x(y+1)} \quad [x > 0; y > 0].$$

(i). Laat zien dat

$$\mathbb{P}(X > a; Y > b) = \frac{1}{1+b} e^{-a(1+b)} \quad [a \geq 0; b \geq 0].$$

(ii). Bepaal, met behulp van (i), $\mathbb{P}(X > a)$ voor $a \geq 0$ en $\mathbb{P}(Y > b)$ voor $b \geq 0$, en ga vervolgens na of X en Y onafhankelijk zijn.

(iii). Bepaal voor $x > 0$ de voorwaardelijke dichtheid van Y gegeven $X = x$, en laat zien dat $(Y | X = x) \stackrel{d}{=} (1/x) X$.

(iv). Laat, door bepaling van de verdelingsfunctie van XY , zien dat $XY \stackrel{d}{=} X$.

Opgave 4. Men is geïnteresseerd in het aantal plaatsen met bodemverontreiniging in de (verschillende) gebieden A en B van s en t km², respectievelijk. Veronderstel dat dit aantal voor A een Poisson(λs)-verdeelde stochastische variabele X is en voor B een Poisson(λt)-verdeelde stochastische variabele Y voor zekere $\lambda > 0$, en dat X en Y onafhankelijk zijn.

(i). Bewijs de bekende eigenschap dat $X + Y$ weer Poisson-verdeeld is; met welke parameter?

Men heeft in A en B samen n verontreinigingsplaatsen aangetroffen, en wil weten hoeveel ervan zich in A bevinden.

(ii). Bepaal daartoe de voorwaardelijke verdeling van X gegeven $X + Y = n$, en laat zien dat dit een binomiale verdeling is met parameters n en $p := s/(s + t)$ [dus onafhankelijk van λ].

Laat het gebied B 9 keer zo groot zijn als A en laat $n = 100$.

(iii). Bepaal verwachting en variantie bij de in (ii) gevonden verdeling.

(iv). Bepaal een (goede) benadering van $\mathbb{P}(X \leq 5 | X + Y = 100)$.

○●★★★●○●●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○

NORMERING: 1 (i): 1 2 (i): 2 3 (i): 2 4 (i): 3 TOTAAL: 36 punten!

 (ii): 2 (ii): 1 (ii): 2 (ii): 3

 (iii): 2 (iii): 3 (iii): 2 (iii): 1 EINDCIJFER:

 (iv): 3 (iv): 2 (iv): 3 (iv): 2 $1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal}$.

 (v): 2

8 10 9 9

○●★★★●○●●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○●○●★★★●○